Zahlengolf

Robert Geretschläger, Graz

Dezember, 2002

Das Golfspiel erfreut sich schon seit Jahrhunderten großer Beliebtheit. Unter anderem hat das sicher damit zu tun, dass die Grundregeln des Spiels zwar besonders einfach sind (mit möglichst wenig Schlägen den Ball vom Abschlag in ein Loch zu bringen), die Beherrschung des Spiels jedoch für Spieler jedes Niveaus eigene interessante Herausforderungen bietet

Beim Zahlengolf, das ich in dieser Arbeit vorstellen möchte, verhält es sich ganz ähnlich. Ob das bedeutet, dass Zahlengolf jemals so populär wie normales Golf sein wird bezweifele ich eher, aber vielleicht läßt sich die Eine oder der Andere doch dafür begeistern.

Die Grundregeln

Als "Schläger" im Zahlengolf verwenden wir positive ganze Zahlen. Ein "Schlag" ist eine (positive) ganzzahlige Potenz des Schlägers.

Haben wir etwa den Schläger 3 zur Verfügung, so sind mögliche Schläge

$$3^4 = 81, \quad 3^2 = 9, \quad 3^1 = 3 \quad \text{oder} \quad 3^0 = 1.$$

Ein "Loch" ist ebenfalls eine (gegebene) positive ganze Zahl. Mit jedem Schlag verringert sich der verbleibende Rest dieser ganzen Zahl ("Distanz zum Loch") um die Potenz des Schlägers die man gewählt hat. (Ebenso wie beim echten Golf bezeichnet der Begriff "Loch" sowohl die Spielbahn als auch das Ziel auf dieser Spielbahn, nämlich hier die Zahl 0.)

Nehmen wir zum Beispiel an, ein Loch wäre vorgegeben mit $\boxed{90}$. Mit diesem Schäger 3 kann ich als ersten Schlag

$$3^4 = 81$$

erreichen, und es bleibt noch $90 - 81 = 9$ als Distanz zum Loch übrig. Nun kann ich als zweiten Schlag

$$3^2 = 9$$

erreichen und es bleibt noch $9 - 9 = 0$ übrig. Ich habe also "eingelocht", da ich das Loch, also den Wert 0, erreicht habe. Das Loch $\boxed{90}$ wurde, nur unter Verwendung des Schlägers 3 mit zwei Schlägen erreicht.

Schlägt man mit einem Schlag "über das Loch", ist also die Differenz negativ, so ist als verbleibende Distanz für den nächsten Schlag der Absolutbetrag zu nehmen. (Beim echten Golf muss man auch zurückspielen wenn man über das Loch geschlagen hat.) Würden wir etwa das Loch $\boxed{80}$ mit dem Schläger 3 spielen, so könnten wir es auch mit 2 Schlägen erreich. Der erste Schlag wäre $3^4 = 81$, und es bleibt $|80 - 81| = |-1| = 1$. Wegen $3^0 = 1$ ist dies aber mit dem zweiten Schlag erreichbar.

Ziel des Spiels ist es natürlich, mit möglichst wenig Schlägen einzulochen, also den Wert 0 zu erreichen.

Die Hauptvariante des Spiels

Ebenso wie beim normalen Golf, spielt man in der Hauptvariante des Zahlengolf einen vorgegebenen “Platz”, der aus 18 Loch besteht. Man kann, zum Beispiel, die Meterdistanzen (bzw. Yarddistanzen) der Spielbahnen eines echten Golfplatzes nehmen. Die Weiten des Old Course in St. Andrews (der Ur-Heimat des Golfsports) sind etwa

1. *Loch* :	370 *yards*	10. *Loch* :	342 *yards*
2. *Loch* :	411 *yards*	11. *Loch* :	172 *yards*
3. *Loch* :	398 *yards*	12. *Loch* :	316 *yards*
4. *Loch* :	463 *yards*	13. *Loch* :	425 *yards*
5. *Loch* :	564 *yards*	14. *Loch* :	567 *yards*
6. *Loch* :	416 *yards*	15. *Loch* :	413 *yards*
7. *Loch* :	372 *yards*	16. *Loch* :	382 *yards*
8. *Loch* :	178 *yards*	17. *Loch* :	461 *yards*
9. *Loch* :	356 *yards*	18. *Loch* :	354 *yards*

Jeder Spieler kann vor Beginn des Spiels (also vor Bekanntgabe der zu spielenden Löcher) fünf Schläger frei wählen. Diese Schläger bilden für den Verlauf der gesamten Runde seinen Schlägersatz. Dazu einige Bemerkungen:

Den Schläger ① zu wählen ist sinnlos, da $1^n = 1$ für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt, aber auch $k^0 = 1$ für alle $k > 1$. Der Schläger ① bewirkt also nichts, das nicht jeder andere Schläger ⓚ auch kann.

Es ist aber sonst schon sinnvoll, eher kleine Schläger zu wählen, da man damit “Feinarbeit” leisten kann. Mit dem Schläger ② etwa, kann man mit

$$2^0 = 1, \quad 2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8 \quad \text{und} \quad 2^4 = 16$$

fünf verschiedene Weiten unter 20 Schlagen. Mit ③ gehen schon nur mit

$$3^0 = 1, \quad 3^1 = 3, \quad \text{und} \quad 3^2 = 9$$

nur drei derartige Weiten, und in dieser Art setzt sich das für höhere Zahlen fort.

Es ist auch sinnlos mit einer Zahl, eine Potenz dieser Zahl als Schläger zu wählen. Hat man etwa ② gewählt, so kann man alle Potenzen jeder Potenz von 2 schlagen, also auch die Potenzen etwa von 4. Hat man also ② schon als Schläger gewählt, ist die Wahl von ④ überflüssig.

Mit diesen Überlegungen scheint es als wäre die einzig sinnvolle Wahl von Schlägern gegeben durch

② , ③ , ⑤ , ⑥ , ⑦ .

In der Tat kann man sich auch dafür entscheiden. Allerdings kann es ein taktischer Vorteil sein, wenn man einen etwas größeren Schläger gewählt hat, den der Kontrahent nicht hat. Wählt man etwa als Schlägersatz

② , ③ , ⑤ , ⑦ , ⑬ ,

so kann man am Loch 169 wegen $13^2 = 169$ ein “Hole-in-one” schlagen (d.h. mit nur einem Schlag einlochen), was mit dem Schlägersatz

② , ③ , ⑤ , ⑥ , ⑦ .

nicht gelingt. Mit diesem Schlägersatz wären z.B. folgende Abläufe möglich:

$$169 \;-\; (2^7 = 128) \;-\; 41 \;-\; (6^2 = 36) \;-\; 5 \;-\; (5^1 = 5) \;-\; 0$$

oder

$$169 \;-\; (3^4 = 81) \;-\; 88 \;-\; (3^4 = 81) \;-\; 7 \;-\; (7^1 = 7) \;-\; 0.$$

In beiden Fällen hat man drei Schläge für das Loch benötigt.

Hätte man beliebig viel Zeit zur Verfügung, so könnte man immer eine optimale Schlaganzahl bestimmen. In der Hauptvariante ist dies aber wegen der Zeitbegrenzung nicht möglich. Jedes Loch wird den Spielern einzeln bekannt gegeben, und die Spieler haben dann genau zwei Minuten Zeit um ihren Lochverlauf bekannt zu geben. Gelingt es einem Spieler nicht in dieser Zeit eine Schlagfolge festzulegen, so zählt das Loch

$$\text{Gesamtlänge} \;:\; \text{längster Schläger} \;+\; \text{Rest.}$$

Im Beispiel für $\boxed{169}$ und

$$②\,,③\,,⑤\,,⑥\,,⑦$$

bedeutet das zum Beispiel $169 : 7 = 24 + 1$ Rest, also zusammen 25 Schläge.

Hat man einen Teil des Lochs zu diesem Zeitpunkt schon gespielt, (d.h. sind sie schriftlich festgehalten worden), so zählen die ersten Schläge, und die Divisionsregel gilt sinngemäß für die verbleibende Restlänge. In jedem Fall ist bei einem nicht fertig gespielten Loch ein Strafschlag zusätzlich zu zählen.

Ein mögliches Loch $\boxed{290}$ kann also von drei Spielern folgendermaßen gespielt werden:

Spieler A: ②, ③, ⑩, ⑪, ⑰

$$290 \;-\; (17^2 = 289) \;-\; 1 \;-\; (2^0 = 1) \;-\; 0$$

2 Schläge

Spieler B: ②, ③, ⑤, ⑦, ⑪

$$290 \;-\; (7^3 = 243) \;-\; 47 \;-\; (5^2 = 25) \;-\; 22$$

Zeit abgelaufen: $22 : 11 = 2$,

$2 + 2 + 1$ Strafschlag 5 Schläge

Spieler C: ②, ③, ⑤, ⑥, ⑦

$$290 \;-\; (7^3 = 243) \;-\; 47 \;-\; (7^2 = 49) \;-\; 2 \;-\; (2^1 = 2) \;-\; 0$$

3 Schläge

Nebenvarianten

Spielt man Zahlengolf allein gegen die Uhr oder mit einem oder mehreren Mitspielern, kann man entweder die Hauptregeln verwenden oder sich auf Sonderregeln einigen. Diese Sonderregelen können das Spiel einfacher oder schwierigier, aber auch mathematisch mehr oder weniger anpruchsvoll machen.

Einige einfache Sonderregeln sind wie folgt:

- Man gibt nicht 2 Minuten pro Loch vor, sondern eine andere Zeit. (z.B. 15 Sekunden pro Loch: “Blitzgolf”; 5 Minuten pro Loch: “Konzentrationsgolf”)
- Die Zeit wird nicht pro Loch zur Verfügung gestellt, sondern en bloc, z.B. jeweils 18 Minuten für die Löcher 1 bis 9 (“front nine”) und 10 bis 18 (“back nine”).

- Anstatt der Meter- oder Yarddistanzen eines echten Golfplatzes verwendet man 18 beliebige Zahlen, die vor dem Spiel von einer neutralen Person vorgegeben werden.
- Die Löcher werden abwechselnd von jedem Spieler vorgeschlagen. Dabei gelten aber einige Einschränkungen. Die Spieler kennen die Schlägersätze von einander. Sie dürfen kein Loch so wählen, dass sie selbst als Potenz eines eigenen Schlägers ("hole-in-one") erreichen können. Sie können somit zwar immer selbst gewählte Löcher so vorgeben, dass sie in 2 Schlägen erreichbar sind, aber dazu haben die Mitspieler auch die Möglichkeit. In dieser Variante gibt man sich also im Wesentlichen gegenseitig Zahlenrätsel auf.
- Vergrößerung des Lochs: Es gilt die Bahn als fertig gespielt, sobald man innerhalb von 1 (bzw. 2, 5 oder 10) von 0 kommt. Man muss also nicht genau mit 0 abschließen. Unter dieser Voraussetzung kann man eventuell einziffrige Schläger ausschließen. Mit letztgenannter Variante wird das Spiel klarerweise viel rechenaufwändiger, und man kann eventuell auch Taschenrechner zulassen.
- Einschränkung der Schläger: Man wählt nicht fünf Schläger, sondern nur vier (bzw. 3, 2 oder nur einen).
- Einwegschläger: Es stehen zwar alle positiven ganzen Zahlen als Schläger zur Verfügung, es darf aber nie mit einer ersten Potenz geschlagen werden (d.h. immer mit mindestens zweiter Potenz) und ein Schläger muss nach einmaliger (bzw. vereinbarungsgemäß zwei- oder dreimaliger) Verwendung "weggeworfen" werden, und darf somit auf der restlichen Runde nicht mehr verwendet werden. Bei dieser Variante steht der Schläger 1 beliebig oft zur Verfügung, da man ansonsten in Situationen geraten kann, in denen gar nicht fertig gespielt werden kann. In dieser Variante wird es zwangsläufig zu höheren Schlagzahlen kommen.

Sebstverständlich können zusätzliche Varianten von jedem Spieler frei erfunden werden. Die angeführten Varianten bieten allerdings schon eine große Vielfalt, und jede davon gibt dem Spiel eine etwas andere Note. Die Hauptvariante ist allerdings schon vielfach mit Schülern erprobt worden, und scheint besonders für jüngere Schüler bei der Einführung des Spiels die geeignetste Variante zu sein. (Es scheint allerdings sinnvoll zu sein, bei jüngeren Schülern für die ersten paar Löcher mehr Zeit zu lassen. Wenn sich eine gewisse Sicherheit mit dem Umgang mit den ganzzahligen Potenzen eingestellt hat, kann man auf die 2 Minuten Regel zurückkehren.)

Optimierungsaufgaben

Wie bereits bemerkt wurde, ist die Zeitbegrenzung ein wesentlicher Faktor bei allen bisher erwähnten Formen des Zahlengolf. Hebt man diese Einschränkung auf, stellt sich die Frage nach dem Bestimmen der kleinstmöglichen Schlagzahl für jedes gegebene Loch bei gegebenem Schlägersatz.

Für die bisherige Art des Spiels bedeutet dies, dass mit der Festlegung der 18 Löcher und der Schlägersatze durch die Spieler, das Ergebnis im Prinzip schon feststeht. Das tatsächliche Berechnen eines solchen Ergebnisses kann aber durchaus sehr reizvolle elementar zahlentheoretische Aufgaben enthalten. Eine interessante (und gar nicht triviale) Aufgabe wäre es für einen interessierten Schüler etwa auch, ein Computerprogramm zu schreiben, das nach Eingabe der Löcher und Schläger das optimale Ergebnis berechnet.

In diesem Zusammenhang beginnen sich auch zahlentheoretische Fragen etwas theoretischerer Art zu stellen. So könnte man etwa vermuten, dass es möglich sein könnte, jedes Loch bei der Auswahl geeigneter Schläger mit zwei Schlägen zu bewältigen. Nehmen wir zum Beispiel an, wir hätten die Schläger ② und ③ zur Verfügung und spielen das Loch $\boxed{209}$. Ein hole-in-one ist offenbar nicht möglich, weil 209 weder eine Potenz von 2 noch von 3 ist. Mit zwei Schlägen kann das Loch aber doch gespielt werden, da

$$2^7 + 3^4 = 128 + 81 = 209$$

gilt. Nun stellt sich konkret die Frage: Kann man jedes Loch mit den Schlägern ② und ③ mit höchstens zwei Schlägen spielen? Abstrakter ausgedrückt, existieren für alle $c \in \mathbf{N}$ Zahlen $x, y \in \mathbf{N}$, sodass entweder

$$2^x = c \quad \text{oder} \quad 3^x = c \quad \text{oder} \quad 2^x + 3^y = c \quad \text{oder}$$

$$2^x - 3^y = \pm c \quad \text{oder} \quad 2^x \pm 2^y = c \quad \text{oder} \quad 3^x \pm 3^y = c$$

gilt? Wenn nein, was ist die kleinste Zahl c, für die dies nicht möglich ist?

Zum Glück für das Spiel stellt sich heraus, dass dies nicht für alle Zahlen c der Fall ist. Es existieren also natürliche Zahlen c, für die keine derartigen Zahlen x und y existieren. Ich möchte diese Behauptung an dieser Stelle nun beweisen, und anschließend einige verwandte Aufgaben vorstellen, deren Lösung ebenso wie das Entwickeln weiterer verwandter Aufgaben dem interessierten Leser überlassen bleiben.

Beweis: Die kleinste Zahl c, die in keiner der Formen

$$2^x,\ 3^x,\ 2^x \pm 2^y,\ 3^x \pm 3^y,\ 2^x \pm 3^y, \quad \text{oder} \quad 3^x - 2^y$$

dargestellt werden kann ist 21.

Jede Zahl, die von der Form $2^x + 2^y$ ist, hat eine Binärdarstellung von der Gestalt

$$100\ldots00100\ldots00_2$$

und jede von der Form $2^x - 2^y$ hat eine Binärdarstellung von der Gestalt

$$11\ldots1100\ldots00_2.$$

Es gilt $21 = 10101_2$, und so ist 21 weder als Summe noch als Differenz zweier Zweierpotenzen darstellbar (noch ist 21 selbst eine Zweierpotenz). Durch einfaches Betrachten aller Zahlen von 1 bis 20 in der Binärdarstellung

$$1_2, 10_2, 11_2, 100_2, 101_2, 110_2, 111_2, 1000_2, 1001_2, 1010_2, 1011_2, 1100_2, 1101_2, 1110_2, 1111_2,$$
$$10000_2, 10001_2, 10010_2, 10011_2, 10100_2$$

erkennen wir, dass all diese Zahlen, bis auf $11 = 1011_2$ und $13 = 1101_2$ entweder selbst Zweierpotenzen sind oder als Summe oder Differenz zweier Zweierpotenzen darstellbar sind. Es gilt aber $11 = 2^1 + 3^2$ und $13 = 2^2 + 3^2$, und somit sind alle natürlichen Zahlen kleiner als 21 in einer der vorgegebenen Formen darstellbar, d.h. mit höchstens zwei Schägen erreichbar. Wenn also 21 nicht in zwei Schlägen erreichbar ist, ist es sicher die kleinste derartige Zahl.

Jede Zahl von der Form $3^x + 3^y$ ist im Dreiersystem von der Gestalt

$$100\ldots00100\ldots00_3$$

und jede von der Form $3^x - 3^y$ ist von der Gestalt

$$22\ldots2200\ldots00_3.$$

Wegen $21 = 210_3$ ist 21 in keiner dieser beiden Formen darstellbar, und offensichtlich ist 21 auch nicht von der Form 3^x.

Wäre nun $2^x \pm 3^y = \pm 21$, so wäre, da weder 20 noch 22 eine Zweierpotenz ist, $y \geq 1$, und daher sowohl 3^y als auch 21 durch 3 teilbar. Dann muss aber auch 2^x durch 3 teilbar sein, was einen Widerspruch ergibt. Wir sehen also, dass 21 auch in dieser Form nicht darstellbar sein kann, und somit kann 21 mit den Schlägern② und ③ nicht darstellbar sein. qed

Einige verwandte Aufgaben für den Leser

- Beweise, dass 7 mit dem Schlägersatz ③ und ⑤ nicht mit 2 Schlägen erreicht werden kann.
- Bestimme die nächstgrößeren Werte nach 7, die mit dem Schlägersatz ③ und ⑤ nicht in höchstens 2 Schlägen erreicht werden können.
- Bestimme alle aus zwei Schlägern bestehenden Schlägersätze, mit denen man das Loch 21 nicht mit ein oder zwei Schlägen erreichen kann.

Selbstverständlich sind geneigte Leser auch eingeladen, weitere verwandte Fragen selbst zu formulieren.

Zahlengolf als didaktisches Mittel: Einführung von Zahlensystemen

Wie im vorigen Abschnitt bereits angedeutet wurde, spielen Zahlensysteme mit "Schlägerbasis" eine gewisse Rolle bei Zahlengolf Optimierungsaufgaben. Man kann Zahlengolf aber auch zur Motivierung der Einführung von allgemeinen Zahlensystemen im Schulunterricht einsetzen. Ein Modell dazu möchte ich in diesem Abschnitt kurz anreißen. (Nur am Rande vermerkt: Es ist meine Erfahrung, dass die Einführung von Zahlensystemen auch ohne spielerische Einführung im Vergleich zu vielen Themen der Schulmathematik relativ leicht gelingt. Dieses Kapitel erscheint vielen Schülern ohnehin als eine Art Spiel. Allerdings schadet es im Unterricht nie, harte mathematische Inhalte durch eine spielerische Vorbereitung noch schmackhafter zu machen.)

Zunächst setzen wir voraus, dass eine Klasse die Grundideen des Zahlengolf bereits beherrscht, also auch einigermaßen frei und locker mit kleinen Potenzen kleiner (einziffriger) Zahlen rechnen kann. Wir stellen der Klasse folgende Aufgabe:

Mit dem Schläger ⑥ sind Löcher von der Länge $\boxed{217}$, $\boxed{148}$, $\boxed{100}$ und $\boxed{72}$ zu spielen. Für jedes Loch sollen möglichst wenig Schläge unter der Voraussetzung gespielt werden, dass das Loch jeweils zu keinem Zeitpunkt überspielt wird. In folgender Tabelle sind die benötigten Schläge in Strichlisten einzutragen:

	$6^4 = 1296$	$6^3 = 216$	$6^2 = 36$	$6^1 = 6$	$6^0 = 1$
217					
148					
100					
72					

Es kann nun geschehen, dass ein Schüler in einem Kästchen mehr als fünf Striche gemacht hat. Etwa für 72 könnte die Strichliste folgendermaßen aussehen:

	$6^4 = 1296$	$6^3 = 216$	$6^2 = 36$	$6^1 = 6$	$6^0 = 1$
72			$\vert$	$\vert\vert\vert\vert\vert\vert$	

Nun kann man den Schüler darauf aufmerksam machen (oder, noch besser, die Schüler machen sich im Rahmen einer Diskussion gegenseitig darauf aufmerksam), dass eine Vereinfachung möglich ist. Es sollte ihm/ihr auffallen, dass

$$6 \cdot 6^1_{6} = 6^2$$

gilt, und daher die 6 Striche in der Spalte $6^1 = 6$ durch einen einzigen in der Spalte $6^2 = 36$ ersetzt werden können, was die Gesamtschlaganzahl um 5 reduziert.

Nach einiger Diskussion sollten sich alle Schüler auf folgende Tabelle geeinigt haben:

<table>
<tr><th></th><th>$6^4 = 1296$</th><th>$6^3 = 216$</th><th>$6^2 = 36$</th><th>$6^1 = 6$</th><th>$6^0 = 1$</th></tr>
<tr><td>217</td><td></td><td>|</td><td></td><td></td><td>|</td></tr>
<tr><td>148</td><td></td><td></td><td>|||</td><td></td><td>||||</td></tr>
<tr><td>100</td><td></td><td></td><td>||</td><td>||||</td><td></td></tr>
<tr><td>72</td><td></td><td></td><td>||</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Die erste Zeile dieser Tabelle bedeutet somit zum Beispiel, dass wir das Loch 217 mit einem Schlag der Länge $6^3 = 216$ und einem Schlag der Länge $6^0 = 1$ erreicht haben.

Ersetzen wir nun die Striche in jedem Feld Tabelle mit deren Anzahl (wobei wir 0 schreiben, wenn sich in einem Feld kein Strich befindet), so sieht die Tabelle folgendermaßen aus:

	$6^4 = 1296$	$6^3 = 216$	$6^2 = 36$	$6^1 = 6$	$6^0 = 1$
217	0	1	0	0	1
148	0	0	3	0	4
100	0	0	2	4	0
72	0	0	2	0	0

Es ist nun nahe liegend die übliche Schreibweise für die Basis 6 aus dieser Tabelle abzuleiten, und wir erhalten unter Vernachlässigung der vorangesetzten Ziffern 0 die Darstellung

$$217 = 1001_6, \quad 148 = 404_6, \quad 100 = 230_6 \quad \text{und} \quad 72 = 200_6.$$

Nun ist also der Boden zur weiteren Behandlung der Zahlensysteme aufbereitet.

Schwierige (?) zahlentheoretische Fragen zum Zahlengolf

Wie in der Zahlentheorie üblich, werfen einfache Situationen sehr schwierige Fragen auf. Leider bin ich derzeit nicht in der Lage die folgenden Fragen zu beantworten. Ich könnte natürlich behaupten, dass ich schöne Lösungen habe, die aber leider im Rand keinen Platz finden, aber das wäre vielleicht ein wenig vermessen von mir. Vielleicht gelingt es aber einer Leserin oder einem Leser die eine oder andere interessante Lösung zu finden.

- Beweise oder widerlege: Für jeden endlichen Schlägersatz exitiert ein Loch, das nicht mit zwei Schlägen erreicht werden kann.
- Sei $s_k(n)$ das kleinste Loch, das nicht mit k Schlägen mit dem Schläger n erreicht werden kann. Bestimme einen geschlossenen Ausdruck für $s_k(n)$.
- Bestimme einen geschlossenen Ausdruck für das analog zu definierende $s_k(n, m)$.

Zusammenfassung

Zahlengolf bietet Ideen für Zahlenspiele auf allen mathematischen Ebenen, von der Grundschule (rechnen mit Grundrechnungsarten) bis zu gar nicht trivialen Fragen der elementaren Zahlentheorie. Ich hoffe, dass einige Leser mit dieser Idee eine Freude haben werden, und vielleicht sogar dazu angeregt werden die hier vorgestellten Ideen weiter zu spinnen.