

Känguru der Mathematik 2005
Gruppe Student (11. und 12. Schulstufe)
Österreich - 17.3.2005



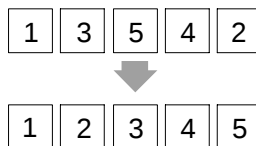
3 Punkte Beispiele

- 1) Für welchen der folgenden Werte von x ist der Wert des Ausdrucks $\frac{x^2}{x^3}$ am kleinsten?
- A) 2 B) 1 C) -1 D) -2 E) -3

- 2) Wie viele ganze Zahlen zwischen 2 und 100 sind dritte Potenzen von ganzen Zahlen?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

- 3) Fünf Karten sind mit den Zahlen 1 bis 5 beschriftet und wie im Bild aufgelegt. In einem Zug können zwei beliebige Karten miteinander vertauscht werden. Wie viele Züge sind mindestens notwendig um die Zahlen auf den Karten in steigende Reihenfolge zu bringen?

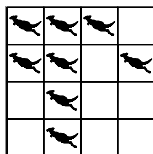


- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

- 4) Wenn $888 \cdot 111 = 2 \cdot (2 \cdot n)^2$ gilt und n eine positive ganze Zahl ist, dann ist n gleich

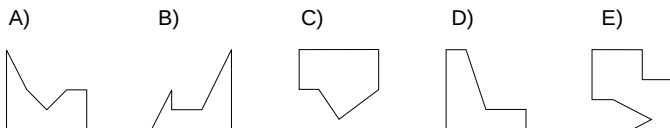
- A) 8 B) 11 C) 22 D) 111 E) 444

- 5) In den Feldern einer Tabelle befinden sich wie abgebildet 8 Kängurus. Ein Känguru kann von seinem Quadrat in jedes leer stehende Quadrat verlegt werden. Bestimme die kleinste Anzahl von Kängurus die bewegt werden müssen, sodass sich in jeder Zeile und jeder Spalte der Tabelle genau zwei Kängurus befinden.



- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

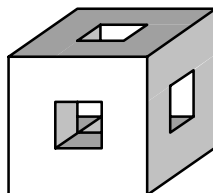
- 6) Ein quadratisches Stück Papier wird in drei Teile zerschnitten. Zwei der entstandenen Teile sind rechts abgebildet. Welche Form hat das dritte Teilstück?



- 7) Welche der folgenden Zahlen kann nicht die Summe von vier aufeinander folgenden positiven ganzen Zahlen sein?

- A) 2002 B) 22 C) 202 D) 222 E) 220

- 8) Ein $3 \times 3 \times 3$ Würfel hat eine Masse von 810 g. Wir bohren drei Löcher wie abgebildet durch den Würfel, wobei jedes Loch ein $1 \times 1 \times 3$ Quader ist. Die Masse des Restkörpers beträgt dann

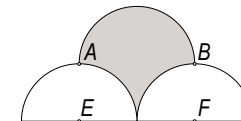


- A) 540 g B) 570 g C) 600 g D) 630 g E) 660 g

- 9) Es sei f eine Funktion, sodass $f(x+1) = 2f(x) - 2002$ für alle ganzzahligen Werte von x gilt und $f(2005) = 2008$ gilt. Dann ist $f(2004)$ gleich

- A) 2004 B) 2005 C) 2008 D) 2010 E) 2016

- 10) Gegeben sind drei Halbkreise wie abgebildet. $ABEF$ ist ein Rechteck und der Radius jedes der drei Halbkreise ist 2 cm. E und F sind die Mittelpunkte der unteren Halbkreise. Der Flächeninhalt des grauen Bereichs beträgt dann in cm^2



- A) 8 B) 7 C) 2π D) $2\pi + 1$ E) $2\pi + 2$

4 Punkte Beispiele

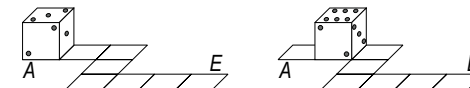
- 11) Mama Känguru und ihr Kind Hupfi springen auf einer 330 m langen Laufbahn im Kreis. Beide springen genau einmal in der Sekunde, wobei Mama mit jedem Sprung 5 m zurücklegt und Hupfi 2 m. Sie beginnen zur gleichen Zeit und springen in derselben Richtung. Nach 25 Sekunden ist Hupfi erschöpft und bleibt stehen, während Mama weiter springt. Nach wie viel Sekunden holt sie ihn wieder ein?

- A) 15 s B) 24 s C) 40 s D) 51 s E) 66 s

- 12) Andreas färbt jede Seitenfläche von Holzwürfeln entweder weiß oder schwarz, wobei er bei jedem Würfel beide Farben verwendet. Wie viele verschiedene Färbungen sind möglich?

- A) 8 B) 16 C) 32 D) 52 E) 64

- 13) Die Summe der Punktezahlen auf gegenüberliegenden Seitenflächen eines Spielwürfels beträgt immer 7. Ein solcher Würfel rollt wie abgebildet von A nach E ab. Zu Beginn A sieht man 3 Punkte auf der oberen Fläche des Würfels. Wie viele Punkte sieht man dort am Ende E?

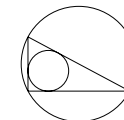


- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

- 14) In einer Schachtel befinden sich rote, blaue und weiße Karten, zusammen 60 Stück. Wenn wir alle roten Karten durch blaue ersetzen, gibt es doppelt so viel blaue wie weiße, aber wenn wir alle weißen durch blaue ersetzen, gibt es drei Mal so viele blaue wie rote. Wie viele blaue Karten befinden sich in der Schachtel?

- A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

- 15) Es seien a und b die Kathetenlängen im abgebildeten rechtwinkligen Dreieck. Ferner sei d der Durchmesser des Inkreises und D der Durchmesser des Umkreises. Dann ist $d+D$ gleich

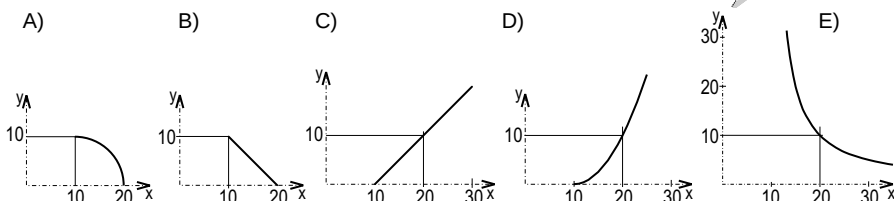
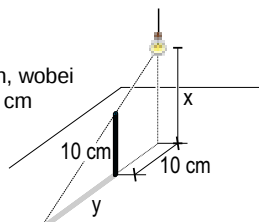


- A) $a+b$ B) $2(a+b)$ C) $\frac{1}{2}(a+b)$ D) $\sqrt{ab}$ E) $\sqrt{a^2+b^2}$

- 16) Es sei M die Menge aller reellen Zahlen x , für die die Ungleichung $2^{4^x} < 4^{2^x}$ gilt. Dann ist $M =$

- A) $]-\infty; 1[$ B) $]0; 1[$ C) $]-\infty; 1[\cup]1; \infty[$ D) $]0; \infty[$ E) $\mathbb{R}$

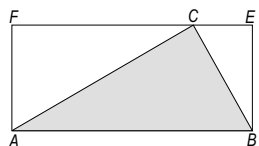
17) Eine Glühlampe wird über einem Tisch senkrecht nach oben gezogen, wobei die Anfangshöhe über dem Tisch 10 cm beträgt (siehe Graphik). Ein 10 cm langer Bleistift steht wie abgebildet senkrecht auf dem Tisch, und wirft einen Schatten auf dem Tisch. Welche der folgenden Kurven beschreibt die Länge y des Schattens (in cm) als Funktion der Höhe x der Birne über dem Tisch (in cm)?



18) Zwei gleich große Flaschen sind mit einem Gemisch aus Wasser und Saft gefüllt. Die Verhältnisse von Wasser zu Saft in den beiden Flaschen betragen 2:1 bzw. 4:1. Wir schütten den Inhalt beider Flaschen in eine gemeinsame Flasche. Das Verhältnis von Wasser zu Saft im resultierenden Gemisch beträgt dann

- A) 3:1 B) 6:1 C) 11:4 D) 5:1 E) 8:1

19) In nebenstehender Figur sehen wir ein Rechteck $ABEF$ und ein Dreieck ABC . Wir wissen, dass der Winkel $\angle ACF$ gleich groß ist wie der Winkel $\angle CBE$. Wenn $FC = 6$ und $CE = 2$, dann beträgt die Fläche von ABC



- A) 12 B) 16 C) $8\sqrt{2}$ D) $8\sqrt{3}$ E) ein anderer Wert

20) Stefan sagt jeden zweiten Tag nur die Wahrheit. An den anderen Tagen lügt er immer. Er spricht heute genau vier der folgenden Sätze aus. Welchen Satz hat er heute sicher nicht ausgesprochen?

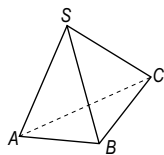
- A) Die Anzahl meiner Freunde ist eine Primzahl.
B) Ich habe gleich viele männliche und weibliche Freunde.
C) Ich heiße Stefan.
D) Ich sage immer die Wahrheit.
E) Drei meiner Freunde sind älter als ich es bin.

5 Punkte Beispiele

21) Welche der folgenden Zahlen kann als Produkt von vier verschiedenen ganzen Zahlen größer als 1 dargestellt werden?

- A) 625 B) 124 C) 108 D) 2187 E) 2025

22) In der Pyramide $SABC$ haben alle Begrenzungs-dreiecke mit dem Eckpunkt S in S einen rechten Winkel. Die Flächeninhalte von SAB , SAC und SBC betragen 3, 4 bzw. 6. Was ist das Volumen von $SABC$?



- A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 12

23) Wenn die Ziffernsumme von m 30 ist, so kann die Ziffernsumme von $m+3$ welchen der folgenden Werte nicht annehmen?

- A) 6 B) 15 C) 21 D) 24 E) 33

24) In einem Beutel befinden sich 17 nummerierte Kugeln. Ihre Nummern sind von der Gestalt $5+k \cdot 125$ mit $k = 0, 1, \dots, 16$, d.h. sie sind 5, 130, 255, 380, 505, ..., 1755, 1880, 2005. Wie viele Kugeln muss man mindestens aus dem Beutel zufällig ziehen, wenn man unter den gezogenen Kugeln sicher zwei haben möchte, deren Nummern die Summe 2010 haben?

- A) 7 B) 8 C) 10 D) 11 E) 17

25) Es ist bekannt, dass $\log_{10}(\sqrt{2005} + \sqrt{1995}) = n$ gilt. Welchen Wert nimmt dann der Ausdruck $\log_{10}(\sqrt{2005} - \sqrt{1995})$ an?

- A) $n-1$ B) $1-n$ C) $\frac{1}{n}$ D) $n+1$

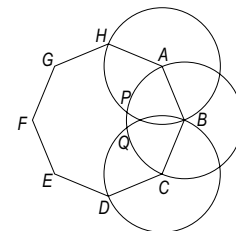
E) Es kann aus der gegebenen Information nicht eindeutig bestimmt werden.

26) Die positive ganze Zahl A hat genau zwei positive Teiler. Die positive ganze Zahl B hat genau fünf positive Teiler. Wie viele positive Teiler hat die Zahl $A \cdot B$?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 10

E) Es kann aus der gegebenen Information nicht eindeutig bestimmt werden.

27) In nebenstehender Figur ist $ABCDEFGH$ ein regelmäßiges Achteck mit der Seitenlänge 1. Die Punkte P und Q sind Schnittpunkte von Kreisen mit Mittelpunkten in A , B und C und Radius 1. Wie groß ist der Winkel $\angle APQ$?



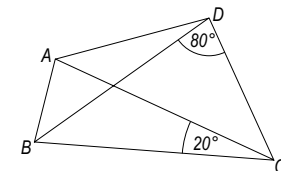
- A) $\frac{19}{24} \cdot \pi$ B) $\frac{8}{11} \cdot \pi$ C) $\frac{5}{8} \cdot \pi$ D) $\frac{3}{4} \cdot \pi$ E) $\frac{7}{9} \cdot \pi$

28) Ich beginne mit einer Zahl, verdopple sie und subtrahiere 1. Nachdem ich dieses Verfahren weitere 98 Mal mit der jeweils resultierenden Zahl wiederholt habe, erhalte ich die Zahl $2^{100} + 1$. Mit welcher Zahl habe ich begonnen?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) eine andere Zahl

29) Im Viereck $ABCD$ halbiert die Diagonale BD den Winkel $\angle ABC$ und es gilt $AC = BC$. Ferner gilt $\angle BDC = 80^\circ$ und $\angle ACB = 20^\circ$. Dann gilt $\angle BAD =$

- A) 90° B) 100° C) 110° D) 120° E) 135°



30) Heinz fährt von A nach B , wobei er plant, mit einer bestimmten konstanten Geschwindigkeit zu fahren. Er bemerkt, dass er 5 Stunden früher als geplant ankommen würde, wenn er seine Geschwindigkeit um 5 km/h steigert, und 8 Stunden früher, wenn er seine Geschwindigkeit um 10 km/h steigert. Was ist seine geplante Geschwindigkeit?

- A) 10 km/h B) 15 km/h C) 20 km/h D) 25 km/h
E) Es kann aus der gegebenen Information nicht eindeutig bestimmt werden.