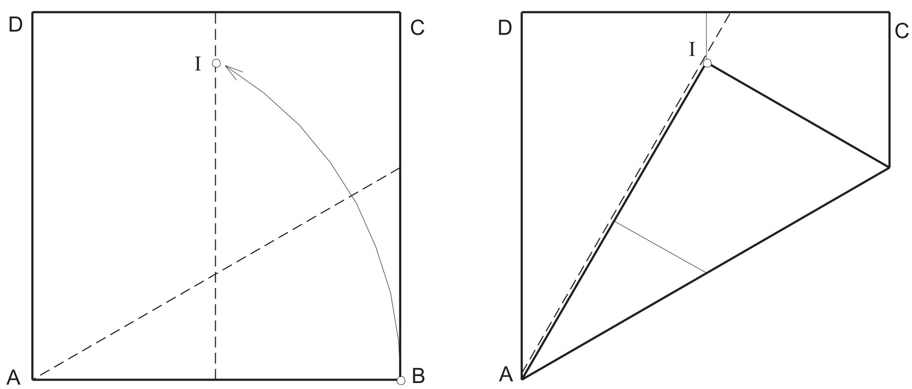
Falten regelmäßiger Vielecke

Blatt 1 Name:________________

Gleichseitige Dreiecke

Ausgehend von einem quadratischen Stück Papier kann man ohne weiteres Werkzeug viele interessante geometrische Figuren nur mit den Mitteln des Papierfaltens (Origami) erzeugen. Diese Figuren kann man nicht nur annähern, sondern genau so exakt bestimmen, wie mit den üblichen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Einen ersten Zugang zu dieser Idee bekommt man schon beim näheren Betrachten der folgenden Figuren:



Wir nehmen an, wir hätten ein quadratisches Stück Papier mit den Eckpunkten A, B, C und D. Wir falten zuerst das Blatt in der Mitte so, dass sich die Kante BC mit der Kante AD überdeckt. Falten wir wieder das Blatt auf, bleibt als Faltkante die senkrechte, strichlierte Linie im linken Bild. Dies ist die Mittenparallele der Strecken BC und AD, und wir haben bereits mit deisem einfachen Vorgang eine erste geometrische "Konstruktion" durchgeführt.

Als nächstes falten wir das Blatt so, dass die Faltkante durch den Punkt A geht, und der Eckpunkt B auf einen Punkt I der eben erzeugten Mittenparallele zu liegen kommt. Das Ergebnis sehen wir im rechtem Bild. Nun stellt sich folgende Frage.

AUFGABE 1.1

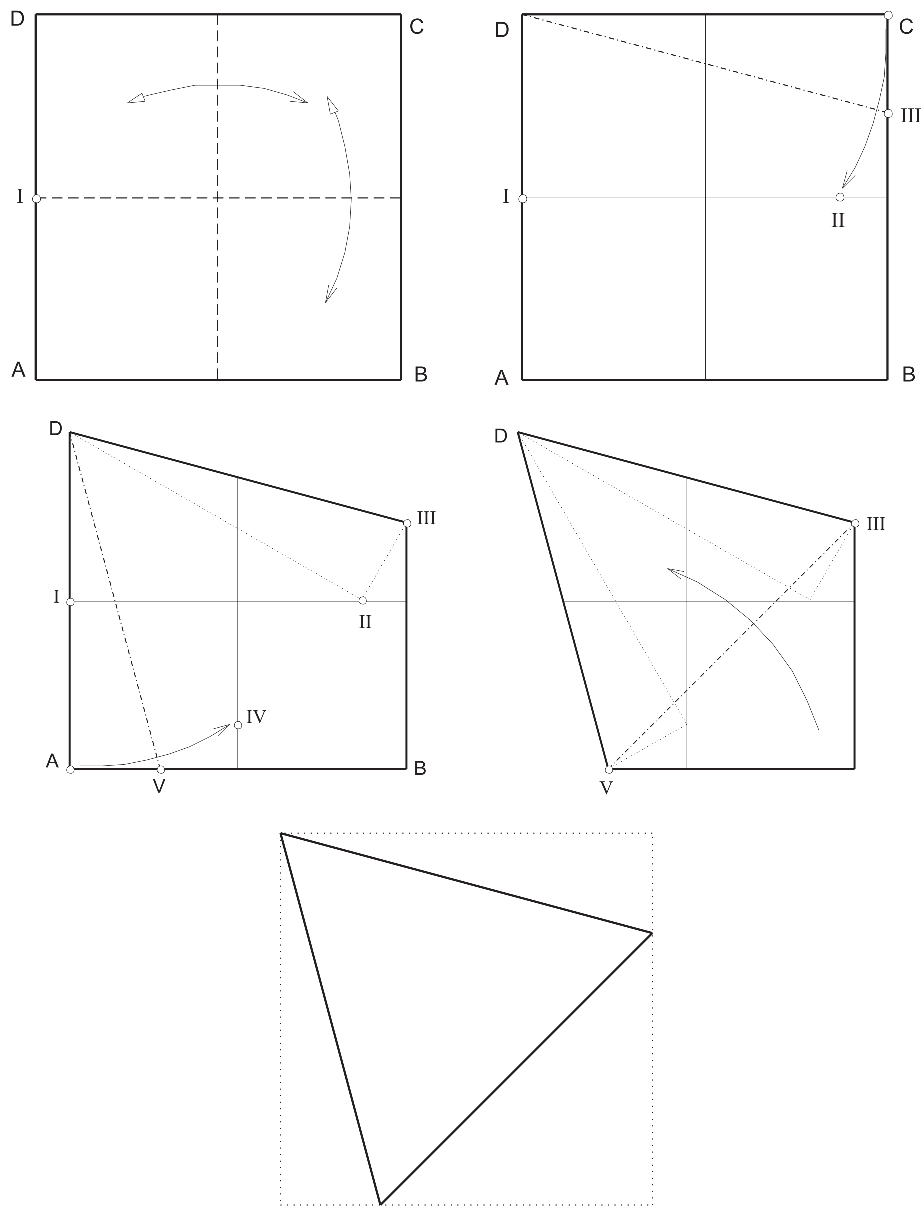
Wie groß ist der Winkel $\angle DAI$? Begründe dies anhand eines selbst gefalteten quadratischen Blatts.

Hat man sich also mit der Materie etwas vertraut gemacht, ist auch die folgende Aufgabe nicht schwer zu lösen.

AUFGABE 1.2

Bestimme eine (möglichst einfache) Methode, mit der man von einem quadratischen Blatt ausgehend ein gleichseitiges Dreieck falten kann.

Nun betrachten wir folgendes Faltmodell:



AUFGABE 1.3

Das Ergebnis dieses Faltmodells ist auch ein gleichseitiges Dreieck. Begründe, warum die Seitenlänge dieses gleichseitigen Dreiecks größer als die des Ausgangsquadrats ist.

Falten regelmäßiger Vielecke

Blatt 1a Name: ____________________

Gleichseitige Dreiecke - Fortsetzung

Nehmen wir nochmals das Dreieck von Aufgabe 1.3. zur Hand. Wir haben behauptet, dass es sich dabei um ein gleichseitiges Dreieck handelt.

AUFGABE 1.4

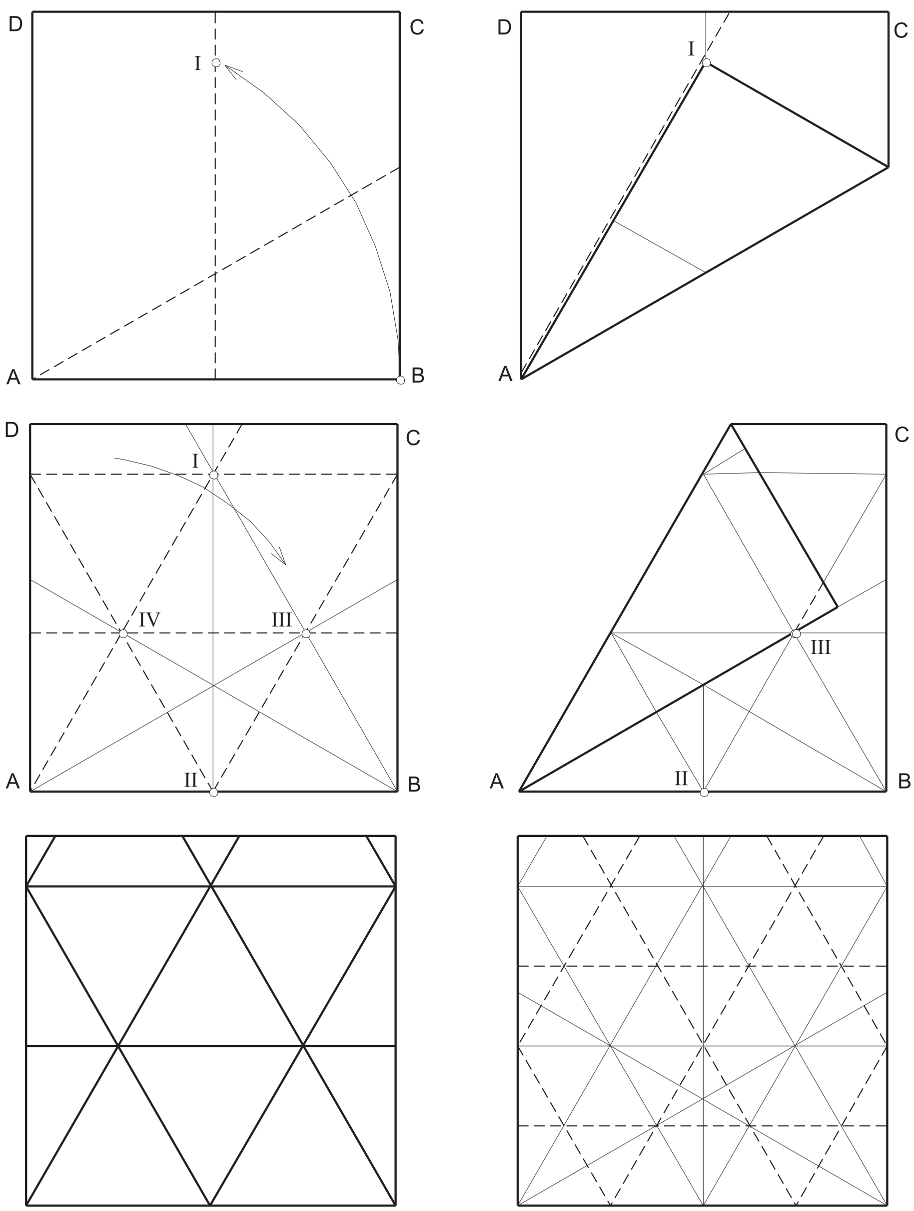
Beweise, warum das Ergebnis dieses Faltmodells ist ein gleichseitiges Dreieck ist.

Falten regelmäßiger Vielecke

Blatt 2 Name:

Das regelmäßige Sechseck

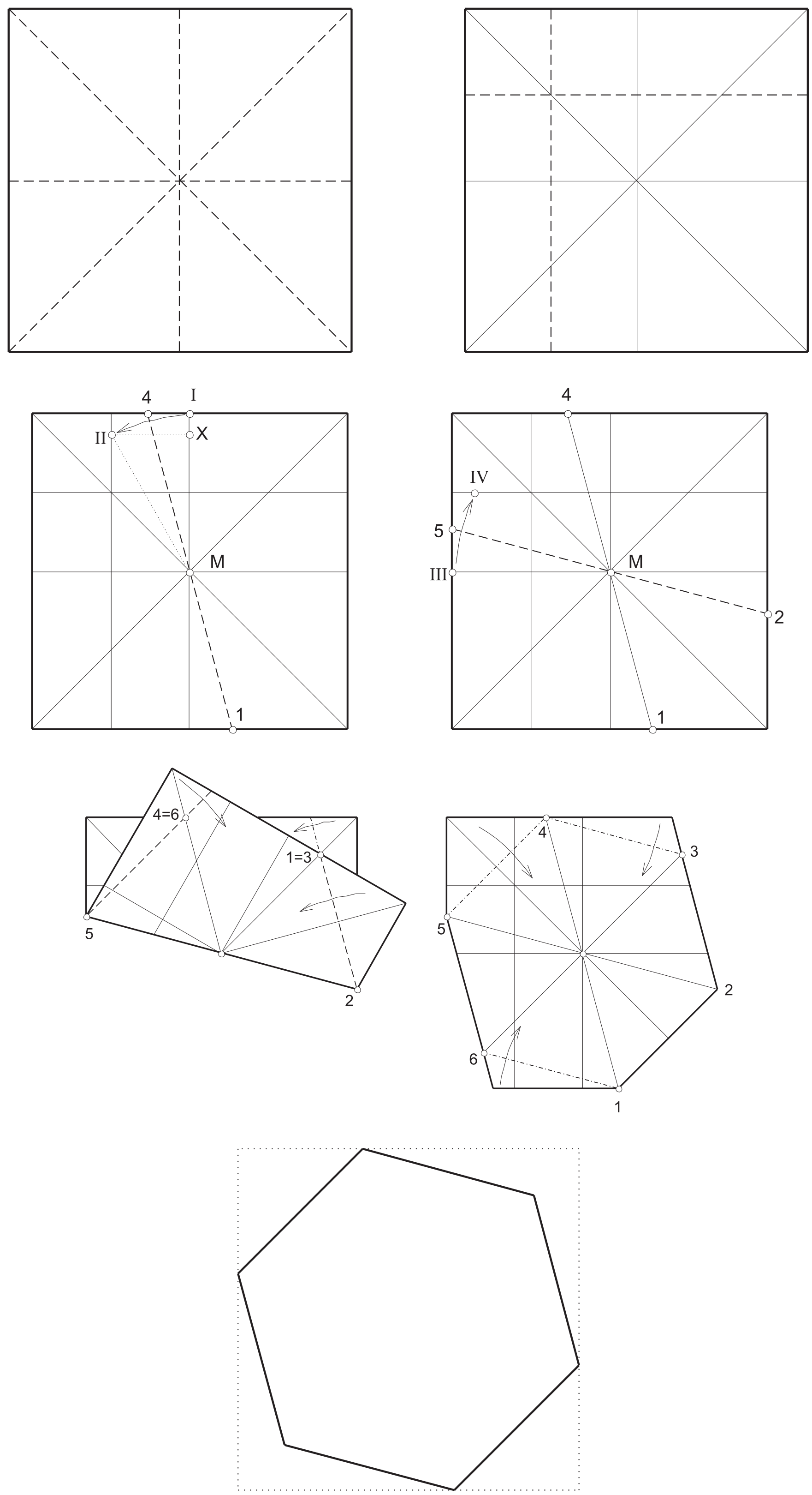
Wir betrachten folgenden Faltvorgang:



AUFGABE 2.1

Führe die abgebildeten Faltvorschriften an einem quadratischen Blatt durch. Begründe, warum das Dreiecksraster (neben einigen Hilfslinien) aus lauter gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt ist. Wie viele regelmäßige Sechsecke sind im Raster auf dem Blatt zu sehen?

Nun betrachten wir wieder ein Faltmodell eines regelmäßigen Sechsecks. Das Sechseck in diesem Modell ist größer als jenes im eben gefalteten.



AUFGABE 2.2

Falte dieses Modell. Begründe, warum dieses Sechseck größer als das des vorigen Modells ist.

Falten regelmäßiger Vielecke

Blatt 2a Name: ____________________

Das regelmäßige Sechseck - Fortsetzung

Wir haben behauptet, dass es sich beim Ergebnis in Aufgabe 2.2 um ein regelmäßiges Sechseck handelt. Ist das aber wirklich sicher der Fall?

AUFGABE 2.3

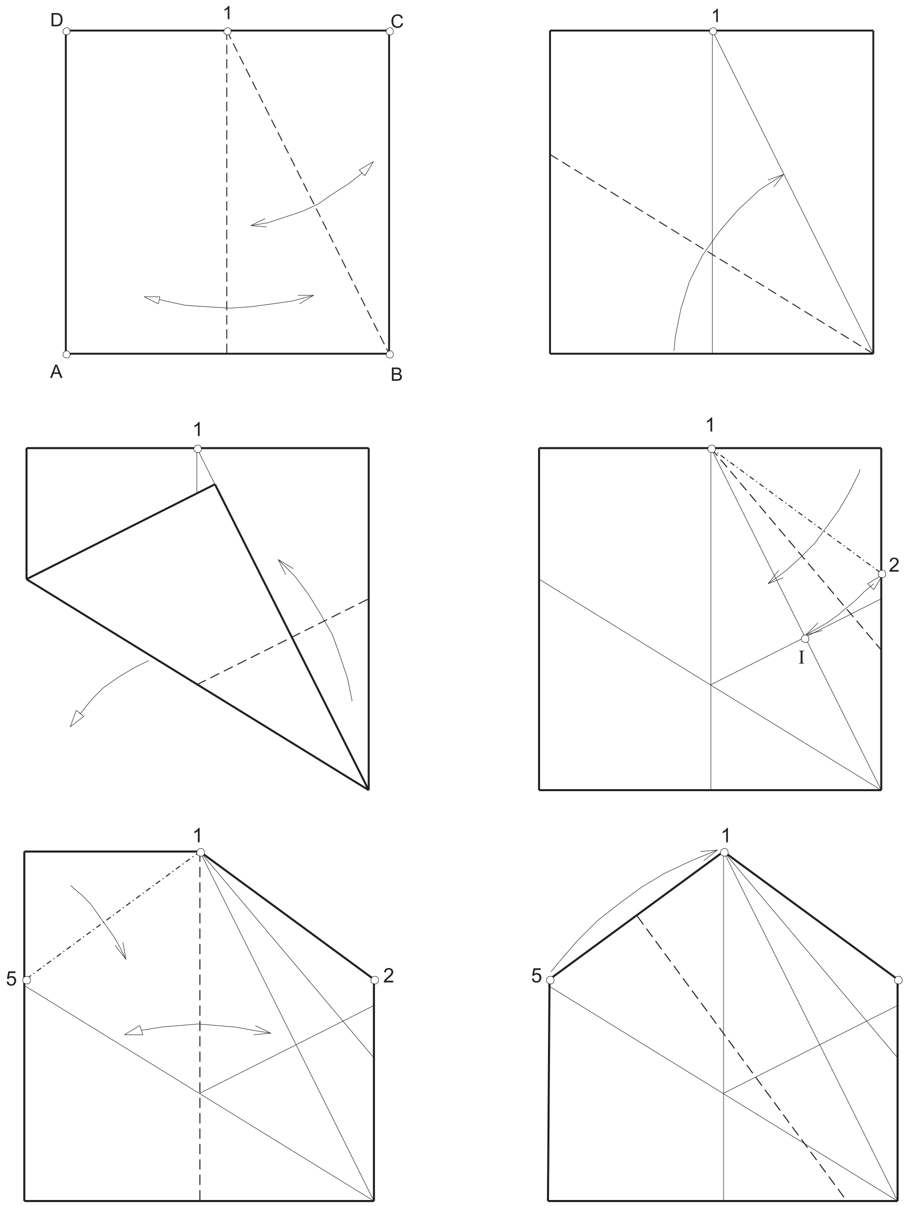
Begründe, warum es sich beim Ergebnis um ein regelmäßiges Sechseck handelt.

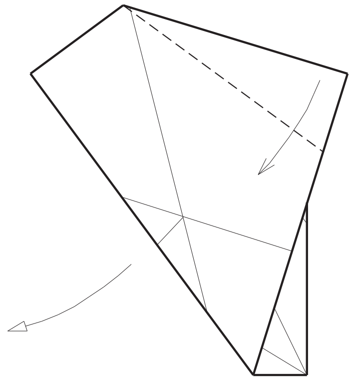
Falten regelmäßiger Vielecke

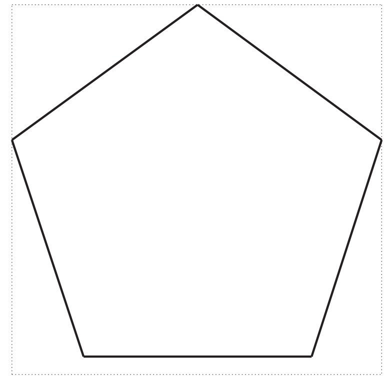
Blatt 3 Name:

Das regelmäßige Fünfeck - Teil I

In den folgenden Figuren wird eine Methode zum Falten eines Fünfecks dargestellt:







Wie sich herausstellen wird, ist dieses Fünfeck sogar regelmäßig. Alle fünf Seiten dieses Fünfecks sind gleich lang und alle Winkel sind gleich groß.

AUFGABE 3.1

Falte nach dieser Vorlage das Fünfeck aus einem quadratischen Stück Papier. Berechne die Länge der Seite 12 *unter der Voraussetzung, dass die Seitenlänge des Ausgangsquadrats 1 ist.*

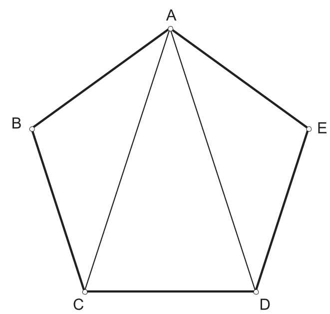
Falten regelmäßiger Vielecke

Blatt 4 Name:

Der goldene Schnitt und das regelmäßige Fünfeck

Im regelmäßigen Fünfeck und in der Faltmethode für diese Figur findet sich eine berühmte Zahl, die in der Literatur häufig als die "Goldene Zahl" oder der "Goldene Schnitt" bezeichnet wird. Kurz wird diese Zahl auch häufig mit dem griechischen Buchstaben ϕ (phi) bezeichnet. Mit diesem Blatt wollen wir diesen Zusammenhang ein wenig näher kennen lernen.

Zunächst betrachten wir wieder ein regelmäßiges Fünfeck, wie in folgender Abbildung:

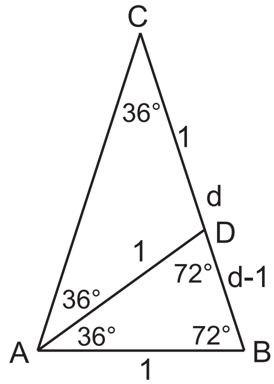


Alle Seiten des Fünfecks $ABCDE$ sind gleich lang, und alle Winkel des Fünfecks sind gleich groß. In der Zeichnung sind zusätzlich die Diagonalen AC und AD eingezeichnet. Zuerst möchten wir folgende Aufgabe lösen.

AUFGABE 4.1

Bestimme alle Winkel in dieser Figur.

Nun betrachten wir folgende Figur, in der auch noch die Diagonale CE ergänzt wurde. Wegen des Auftretens verschiedener gleichschenkeliger Dreiecke tritt die Seitenlänge des Fünfecks (die wir hier als Einheit 1 bezeichnet haben) mehrfach auf. Bezeichnen wir ferner die Diagonalenlänge des Fünfecks mit d, können wir spezielle das innere Dreieck aus dem Fünfeck gesondert zeichnen:



Dieses Dreieck hat die interessante Eigenschaft, dass das große Dreieck ABC dem kleineren Dreieck ABD ähnlich ist.

AUFGABE 4.2

Begründe, warum die Beziehung $d^2 = d + 1$ für die längere Seite des Dreiecks ABC gilt.

AUFGABE 4.3

Begründe, warum die Diagonalenlänge in einem regelmäßigen Fünfeck genau das ϕ-fache der Seitenlänge beträgt. (Hinweis: Es gilt $\phi = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1)$.)

Nun erkennen wir auch, warum das Ergebnis der Faltmethode von Blatt 3 ein regelmößiges Fünfecke sein muss. Das Fünfeck wurde so gefaltet, dass die Seitenlänge des Fünfecks gleich dem $\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1)$-fachen der Quadratseitenlänge ist, was auch die Diagonalenlänge des Fünfecks ist. Wegen $\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1) = \frac{1}{4} \cdot (5 - 1) = 1$ ergibt dies genau das Verhältnis von Seitenlänge zu Diagonalenlänge in einem regelmäßigen Fünfeck.