Arbeitsblätter zum Thema "Falten regelmäßiger Vielecke" für den Unterricht ab der Sekundarstufe I

Robert Geretschläger

Graz, Österreich, 2010

Hinweis: Die Blätter 1, 2, 3 und 4 sind für Schüler und Schülerinnen jedes Leistungsniveaus geeignet. Die Blätter 1a und 2a sind als Ergänzungen für besonders Interessierte oder Begabte gedacht.

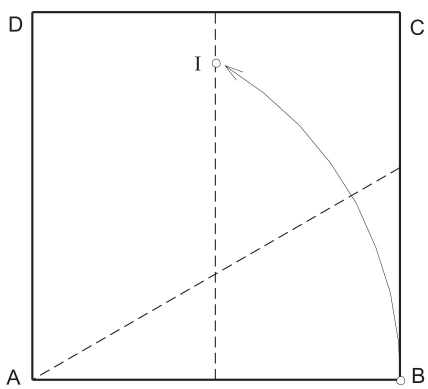
Die in den Figuren verwendete Notation lehnt sich soweit wie möglich an die übliche Standardnotation der Origami. Es ist allerdings kein Wissen über diese Notation für das Falten der Modelle notwendig, da die Linien und Pfeile selbsterklärend sind.

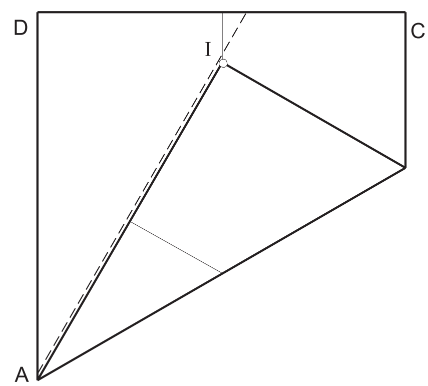
Falten regelmäßiger Vielecke

Blatt 1 Name:______________________

Gleichseitige Dreiecke

Ausgehend von einem quadratischen Stück Papier kann man ohne weiteres Werkzeug viele interessante geometrische Figuren nur mit den Mitteln des Papierfaltens (Origami) erzeugen. Diese Figuren kann man nicht nur annähern, sondern genau so exakt bestimmen, wie mit den üblichen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Einen ersten Zugang zu dieser Idee bekommt man schon beim näheren Betrachten der folgenden Figuren:





Wir nehmen an, wir hätten ein quadratisches Stück Papier mit den Eckpunkten A, B, C und D. Wir falten zuerst das Blatt in der Mitte so, dass sich die Kante BC mit der Kante AD überdeckt. Falten wir wieder das Blatt auf, bleibt als Faltkante die senkrechte, strichlierte Linie im linken Bild. Dies ist die Mittenparallele der Strecken BC und AD, und wir haben bereits mit deisem einfachen Vorgang eine erste geometrische "Konstruktion" durchgeführt.

Als nächstes falten wir das Blatt so, dass die Faltkante durch den Punkt A geht, und der Eckpunkt B auf einen Punkt I der eben erzeugten Mittenparallele zu liegen kommt. Das Ergebnis sehen wir im rechtem Bild. Nun stellt sich folgende Frage.

AUFGABE 1.1

Wie groß ist der Winkel $\angle DAI$? Begründe dies anhand eines selbst gefalteten quadratischen Blatts.

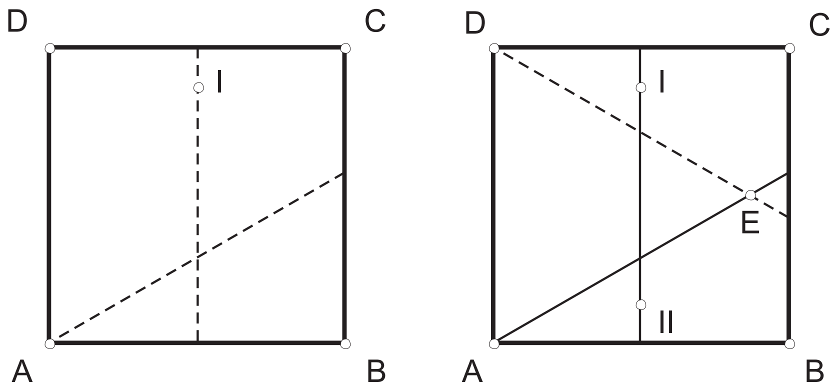
Beim Faltvorgang wird die Kante AB des quadratischen Blatts zur Strecke AI geführt. Es gilt also sicher $AI = AB$. Da I auf der Mittenparallele von BC und AD liegt, die gleichzeitig die Streckensymmetrale von AB ist, gilt auch sicher $AI = BI$. Wir erkennen, also, dass die Seiten des Dreiecks ABI alle gleich lang sind. Dieses Dreieck ist also gleichseitig, und es gilt somit $\angle IAB = 60^o$. Da $\angle DAB$ ein rechter Winkel ist, erhalten wir $\angle DAI = \angle DAB - \angle IAB = 90^o - 60^o = 30^o$.

Hat man sich also mit der Materie etwas vertraut gemacht, ist auch die folgende Aufgabe nicht schwer zu lösen.

AUFGABE 1.2

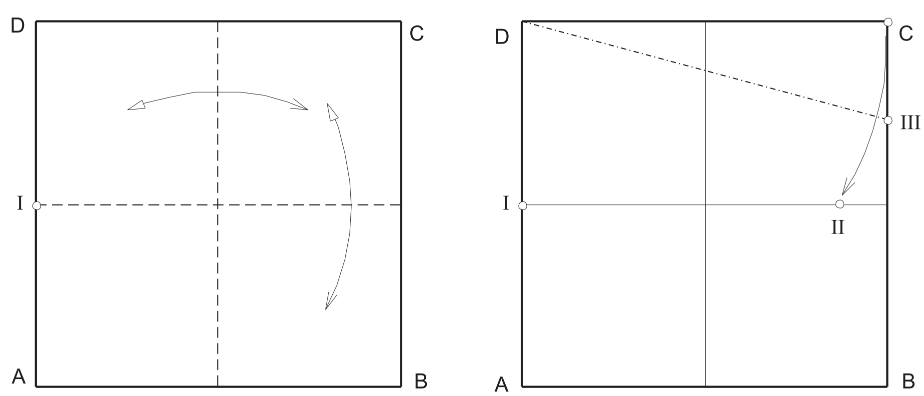
Bestimme eine (möglichst einfache) Methode, mit der man von einem quadratischen Blatt ausgehend ein gleichseitiges Dreieck falten kann.

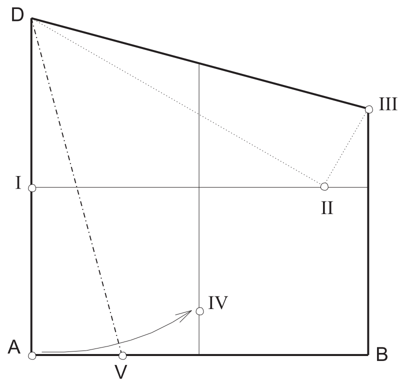
Es gibt freilich viele Lösungen dieser Aufgabe. Eine sehr einfache, die von der bereits vorbereiteten Idee leicht abgeleitet werden kann ist in folgender Figur zu sehen:

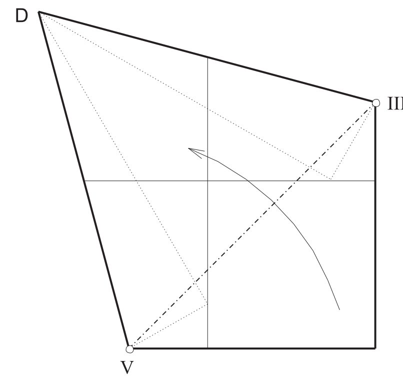


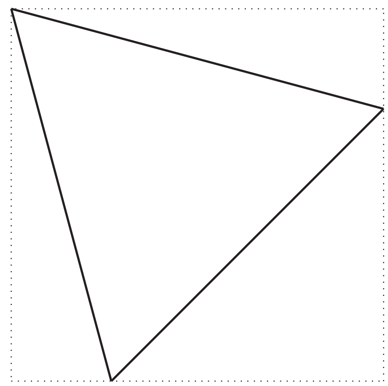
Wie in Aufgabe 1.1 bereits überlegt, gilt $\angle IAB = 60^o$. Da die Faltkante, die beim falten von AB zu AI entsteht, diesen Winkel genau halbiert, schließt diese Faltkante sowohl mit AI als auchg mit AB jeweils einen Winkel von 30^o ein. Es schließt diese Faltkante daher mit AD einen Winkel von 60^o ein, da nach Aufgabe 1.1 auch $\angle DAI = 30^o$ gilt. Faltet man also auf die gleiche Art wie unten auch oben nochmals, d.h. so, dass C auf einen Punkt der senkrechten Faltkante zu liegen kommt, und die neu entstehende Faltkante durch D geht, so schließt auch die neue Flatkante mit DA den Winkel 60^o ein. Bezeichnen wir den Schnittpunkt der beiden schrägen Faltkanten mit E, so gilt $\angle DAE = \angle ADE = 60^o$, und $\triangle ADE$ ist somit gleichseitig.

Nun betrachten wir folgendes Faltmodell:









AUFGABE 1.3

Das Ergebnis dieses Faltmodells ist auch ein gleichseitiges Dreieck. Begründe, warum die Seitenlänge dieses gleichseitigen Dreiecks größer als die des Ausgangsquadrats ist.

Da das Dreieck $\triangle ADV$ rechwinkelig ist, ist seine Hypotenuse größer als seine beiden Katheten. Die Hypotenuse DV ist aber eine Seite des Dreiecks, und die Kathete AD ist eine Seite des Ausgangsquadrats, womit der Beweis schon abgeschlossen ist.

Es ist interessant zu beobachten, dass es sich bei diesem Dreieck um das größte handelt, das auf den Quadrat Platz finden kann. Der vollständige Beweis dieser Tatsache ist jedoch nicht ganz leicht zu führen.

Falten regelmäßiger Vielecke

Blatt 1a Name:____________________

Gleichseitige Dreiecke - Fortsetzung

Nehmen wir nochmals das Dreieck von Aufgabe 1.3. zur Hand. Wir haben behauptet, dass es sich dabei um ein gleichseitiges Dreieck handelt.

AUFGABE 1.4

Beweise, warum das Ergebnis dieses Faltmodells ist ein gleichseitiges Dreieck ist.

Betrachten wir das Dreieck $\triangle DIII$, sehen wir, dass $\angle DIII$ ein rechter Winkel ist, und da DI die Hälfte der Kante DA ist, und $DII = DC$ gilt, ist die Hypotenuse DII in diesem Dreieck doppelt so lang wie die Kathete DI. Es folgt somit $\angle IDII = 60^o$, und somit auch $\angle IIDC = 90^o - 60^o = 30^o$. Da $DIII$ die Winkelsymmetrale von $\angle IIDC$ ist, gilt

$$\angle IIDIII = \angle IIIDC = 15^o,$$

und da das selbe Argument auch für A, IV und V wie für C, II und III gilt, folgt auch $\angle VDA = 15^o$. Es gilt somit

$$\begin{aligned} \angle IIIDV &= \angle CDA - \angle CDIII - \angle VDA \\ &= 90^o - 15^o - 15^o \\ &= 60^o, \end{aligned}$$

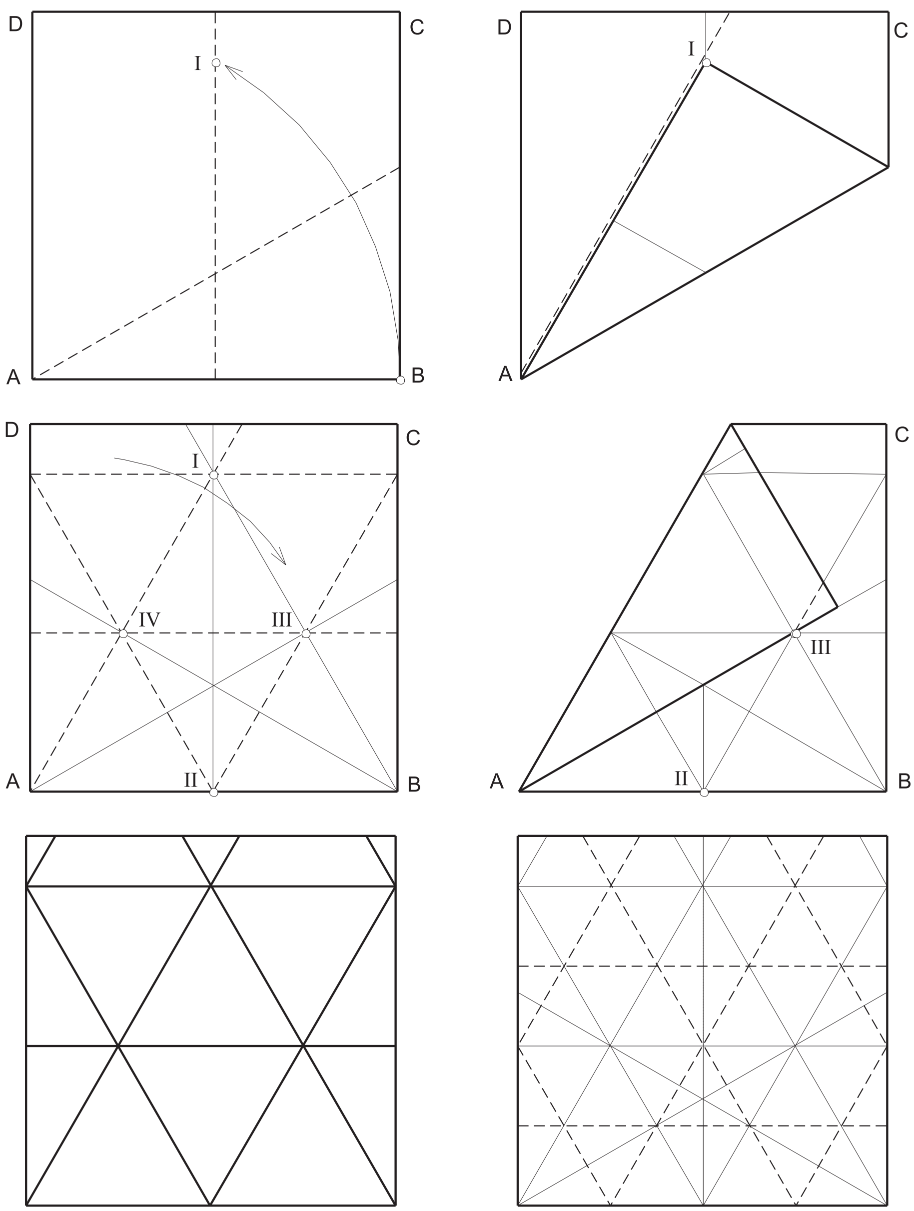
und da $DIII$ und DV offensichtlich wegen der Symmetrie gleich lang sind, ist das Dreieck $\triangle IIIDV$ gleichschenkelig mit einem 60^o Winkel, und somit sogar gleichseitig.

Falten regelmäßiger Vielecke

Blatt 2 Name: ____________________

Das regelmäßige Sechseck

Wir betrachten folgenden Faltvorgang:



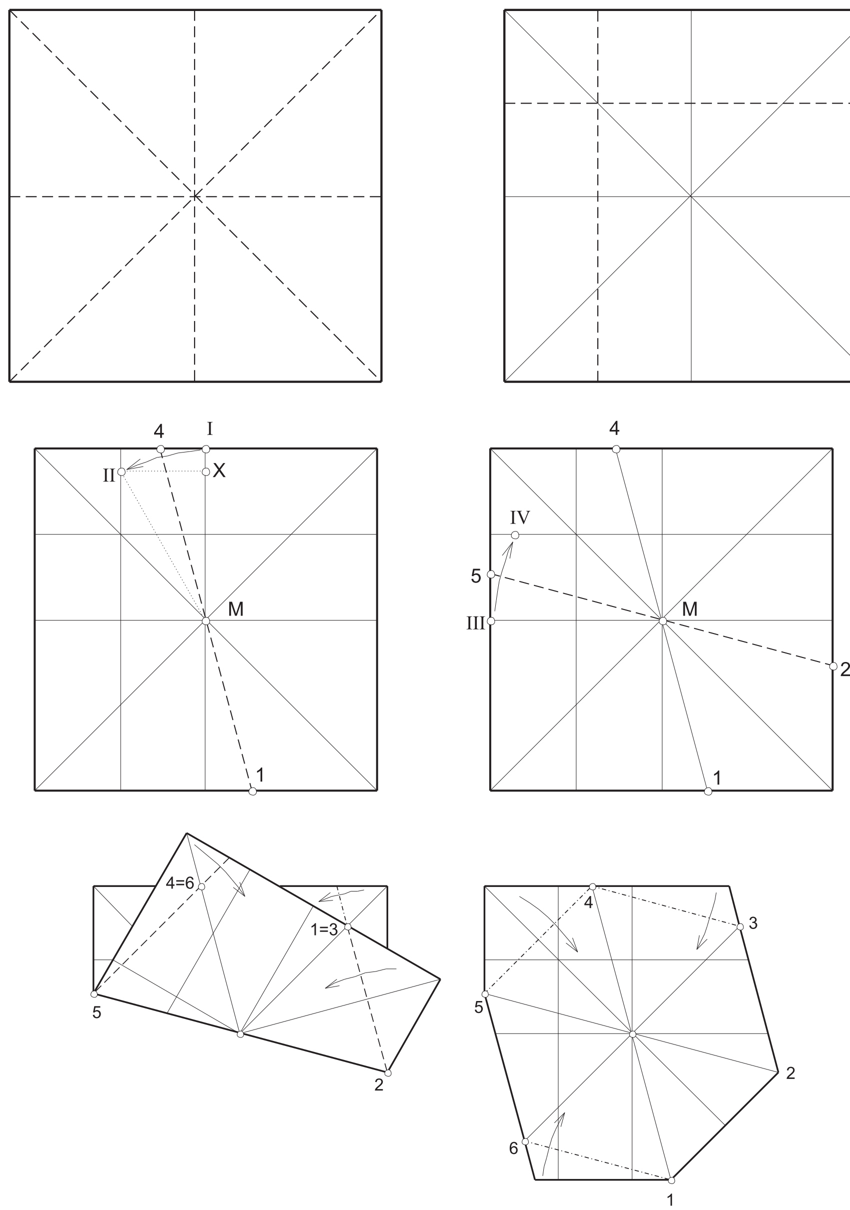
AUFGABE 2.1

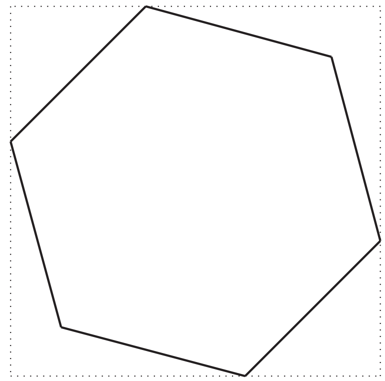
Führe die abgebildeten Faltvorschriften an einem quadratischen Blatt durch. Begründe, warum das Dreiecksraster (neben einigen Hilfslinien) aus lauter gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt ist. Wie viele regelmäßige Sechsecke sind im Raster auf dem Blatt zu sehen?

Die Begründung für die ersten auftretenden 60^o Winkel wurde schon im Arbeitsblatt 1 ausgeführt. Die restlichen Winkel sind deswegen wiederum 60^o, da das Falten immer wieder durch (geometrische) Spiegelungen symmetrische Figuren erzeugt. Es treten auf dem Quadrat am Schluss 7 kleine regelmäßige Sechsecke und ein großes auf.

Der Sinn dieser Übung liegt in der Verbindung des Handwerklichen mit der geometrischen Einsicht. Die Herstellung des Rasters gelingt nur dann, wenn die Symmetrien auch tatsächlich sauber beim falten genutzt werden.

Nun betrachten wir wieder ein Faltmodell eines regelmäßigen Sechsecks. Das Sechseck in diesem Modell ist größer als jenes im eben gefalteten.





AUFGABE 2.2

Falte dieses Modell. Begründe, warum dieses Sechseck größer als das des vorigen Modells ist.

Am einfachsten erkennt man dies beim Betrachten der Diagonalen des Sechsecks. In diesem Modell ist die Strecke 14 eine Diagonale, und da diese beiden Punkte auf gegenüberliegenden Seiten des Quadrats liegen, ihre Verbindungsstrecke aber nicht im rechten Winkel zur Quadratseite liegt, ist diese Strecke länger als die Quadratseitenlänge. Im ersten Modell ist aber die Hauptdiagonale des gefalteten regelmäßigen Sechsecks parallel zu einer Quadratseite. Die Strecke 14 ist also sicher länger, und da das Sechseck im zweiten Modell eine längere Hauptdiagonale als die im ersten Modell besitzt, ist sie auch insgesamt größer.

Falten regelmäßiger Vielecke

Blatt 2a Name:______________________

Das regelmäßige Sechseck - Fortsetzung

Wir haben behauptet, dass es sich beim Ergebnis in Aufgabe 2.2 um ein regelmäßiges Sechseck handelt. Ist das aber wirklich sicher der Fall?

AUFGABE 2.3

Begründe, warum es sich beim Ergebnis um ein regelmäßiges Sechseck handelt.

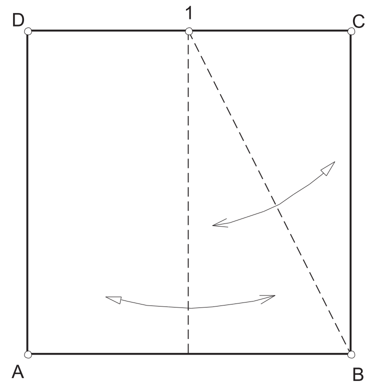
Betrachten wir nur das linke obere Eck des Modells im dritten Schritt, sehen wir, dass die ersten Faltvorgänge genau dieselben wie im Modell des gleichseitigen Dreiecks von Aufgabe 1.3 sind (allerdings um 180^o gedreht). Das Dreieck $M45$ ist daher (ebenso wie das Dreieck $M12$) gleichseitig. Da nun die Strecke 23 aufgrund des Faltvorgangs gleich lang wie die Strecke 12ist, und Analoges auch für die restlichen Seiten des Sechsecks gilt, muss das Secheck 123456 mit Mittelpunkt M aus sechs gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt sein. Es handelt sich dabei also, wie behauptet, um ein regelmäßiges Sechseck.

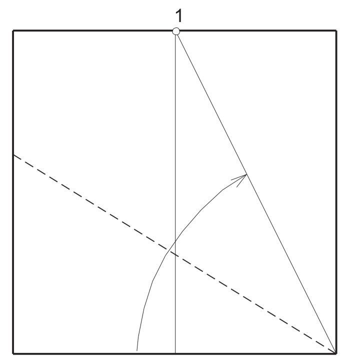
Falten regelmäßiger Vielecke

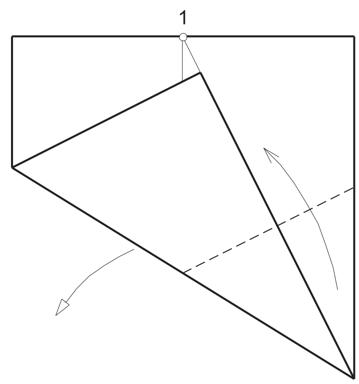
Blatt 3 Name:

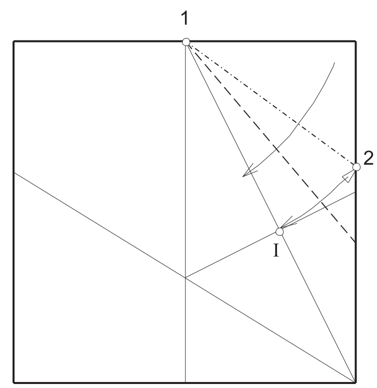
Das regelmäßige Fünfeck - Teil I

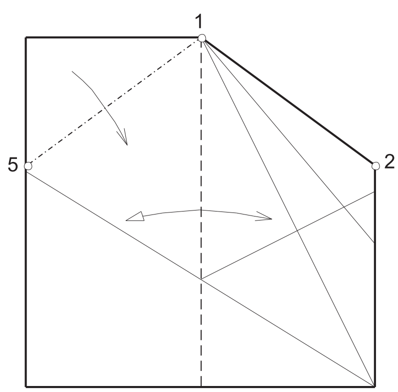
In den folgenden Figuren wird eine Methode zum Falten eines Fünfecks dargestellt:

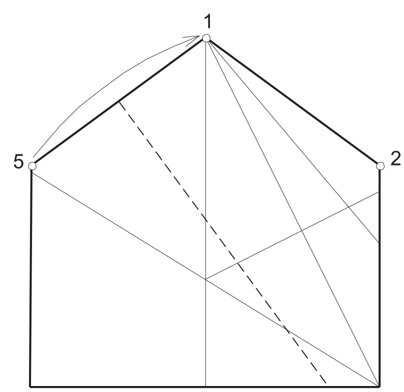


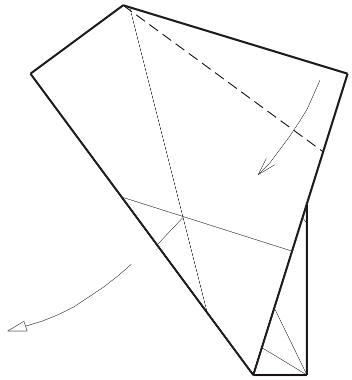


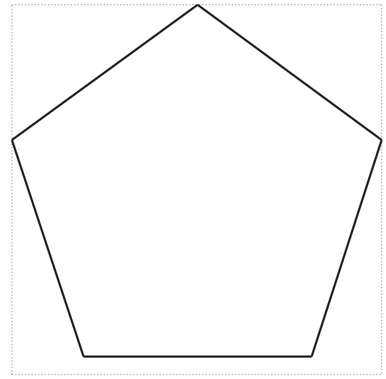












Wie sich herausstellen wird, ist dieses Fünfeck sogar regelmäßig. Alle fünf Seiten dieses Fünfecks sind gleich lang und alle Winkel sind gleich groß.

AUFGABE 3.1

Falte nach dieser Vorlage das Fünfeck aus einem quadratischen Stück Papier. Berechne die Länge der Seite 12 *unter der Voraussetzung, dass die Seitenlänge des Ausgangsquadrats 1 ist.*

Das Dreieck $\triangle BC1$ im ersten Schritt ist rechtwinkelig mit Katheten der Längen 1 bzw. $\frac{1}{2}$. Die Länge der Hypotenuse $1B$ beträgt nach dem Pythagoräischen Lehrsatz daher $\frac{\sqrt{5}}{2}$. In den nächsten beiden Schritten wird die halbe Seitenlänge des Quadrats, also eine Strecke der Länge $\frac{1}{2}$ auf $1B$ übertragen. Die Strecke $1I$ im vierten Schritt hat also die Länge $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Da diese Strecke zur gesuchten Strecke 12 übertragen wird, ist dies auch die Länge der gesuchten Strecke.

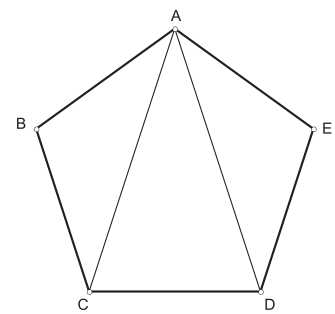
Falten regelmäßiger Vielecke

Blatt 4 Name: ____________________

Der goldene Schnitt und das regelmäßige Fünfeck

Im regelmäßigen Fünfeck und in der Faltmethode für diese Figur findet sich eine berühmte Zahl, die in der Literatur häufig als die "Goldene Zahl" oder der "Goldene Schnitt" bezeichnet wird. Kurz wird diese Zahl auch häufig mit dem griechischen Buchstaben ϕ (phi) bezeichnet. Mit diesem Blatt wollen wir diesen Zusammenhang ein wenig näher kennen lernen.

Zunächst betrachten wir wieder ein regelmäßiges Fünfeck, wie in folgender Abbildung:

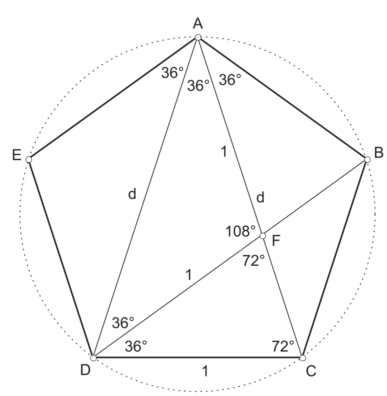


Alle Seiten des Fünfecks $ABCDE$ sind gleich lang, und alle Winkel des Fünfecks sind gleich groß. In der Zeichnung sind zusätzlich die Diagonalen AC und AD eingezeichnet. Zuerst möchten wir folgende Aufgabe lösen.

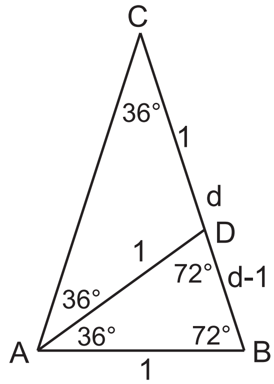
AUFGABE 4.1

Bestimme alle Winkel in dieser Figur.

Die beiden Diagonalen zerteilen das Fünfeck in drei Dreiecke. In jedem Dreieck ist die Summe der (Innen-)Winkel jeweils 180^o, und somit ist die Summe der Winkel im Fünfeck $3 \cdot 180^o = 540^o$. Da die fünf Winkel gleich groß sind, beträgt jeder von ihnen $540^o : 5 = 108^o$. Da die Dreiecke ABC und ADE jeweils gleichschenkelig sind, betragen die spitzen Winkel in diesen Dreieck jeweils $(180^o - 108^o) : 2 = 36^o$, und somit erhalten wir für die Winkel im (ebenfalls gleichschenkeligen) Dreieck ACD die Werte $\angle CAD = 108^o - 2 \cdot 36^o = 36^o$ und $\angle ACD = \angle ADC = (180^o - 36^o) : 2 = 72^o$.



Nun betrachten wir folgende Figur, in der auch noch die Diagonale CE ergänzt wurde. Wegen des Auftretens verschiedener gleichschenkeliger Dreiecke tritt die Seitenlänge des Fünfecks (die wir hier als Einheit 1 bezeichnet haben) mehrfach auf. Bezeichnen wir ferner die Diagonalenlänge des Fünfecks mit d, können wir spezielle das innere Dreieck aus dem Fünfeck gesondert zeichnen:



Dieses Dreieck hat die interessante Eigenschaft, dass das große Dreieck ABC dem kleineren Dreieck ABD ähnlich ist.

AUFGABE 4.2

Begründe, warum die Beziehung $d^2 = d + 1$ für die längere Seite des Dreiecks ABC gilt.

Da die Dreiecke ABC und ACD ähnlich sind gilt $BC : BA = DA : DB$. Daraus folgt aber $d : 1 = 1 : d - 1$, und dies ist gleichwertig mit $d(d - 1) = 1$, oder $d^2 = d + 1$.

AUFGABE 4.3

Begründe, warum die Diagonalenlänge in einem regelmäßigen Fünfeck genau das ϕ-fache der Seitenlänge beträgt. (Hinweis: Es gilt $\phi = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1)$.)

Diese Behauptung folgt unmittelbar wegen $\phi^2 = \frac{1}{4} \cdot (5 + 2 \cdot \sqrt{5} + 1) = \frac{1}{2} + \sqrt{5} + 3) = \phi + 1$.

Nun erkennen wir auch, warum das Ergebnis der Faltmethode von Blatt 3 ein regelmößiges Fünfecke sein muss. Das Fünfeck wurde so gefaltet, dass die Seitenlänge des Fünfecks gleich dem $\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1)$-fachen der Quadratseitenlänge ist, was auch die Diagonalenlänge des Fünfecks ist. Wegen $\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1) = \frac{1}{4} \cdot (5 - 1) = 1$ ergibt dies genau das Verhältnis von Seitenlänge zu Diagonalenlänge in einem regelmäßigen Fünfeck.