IMO 2021 Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 1: Es sei $n \geq 100$ eine ganze Zahl. Wanja schreibt die Zahlen $n, n+1, \ldots, 2n$ auf Karten, jede auf eine eigene Karte. Er mischt diese $n+1$ Karten und verteilt sie auf zwei Stapel. Man zeige, dass mindestens einer der Stapel zwei Karten enthält, deren Zahlen in Summe eine Quadratzahl ergeben.

Lösung: Von den Zahlen auf jeweils zwei der Karten kann man als Summe alle Zahlen von $2n+1$ bis $4n-1$ bilden. Können wir unter diesen Zahlen drei Quadratzahlen finden und unter den Zahlen auf den Karten drei Zahlen a, b und c, deren paarweise Summen diese drei Quadratzahlen ergeben, so müssen laut SFS mindestens zwei dieser Karten im gleichen Stapel zu liegen kommen, womit die Gültigkeit der Behauptung gezeigt wäre.
Wählen wir drei aufeinanderfolgende Quadratzahlen $(2k-1)^2$, $(2k)^2$ und $(2k+1)^2$, so ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a+b &= (2k-1)^2 \\ b+c &= (2k+1)^2 \\ c+a &= (2k)^2 \end{aligned}$$

die Lösungen

$$(a,b,c) = (2k^2-4k; 2k^2+1; 2k^2+4k).$$

Für eine vorgegebene Zahl n benötigen wir also, um diesen Ansatz anwenden zu können, einen Wert von k mit $n \leq 2k^2-4k$ und $2k^2+4k \leq 2n$. Ein vorgegebener Wert von k ist also für die Bestimmung der Kartenwerte nach diesem Ansatz für alle Werte von n mit

$$n \in [k^2+2k; 2k^2-4k].$$

Wir bezeichnen dieses Intervall als I_k. Für $k \geq 9$ ist der rechte Randwert von I_k größer als der linke Randwert von I_{k+1}, da dann

$$\begin{aligned} (k+1)^2+2(k+1) \leq 2k^2-4k &\iff k^2+4k+3 \leq 2k^2-4k \\ &\iff 0 \leq k^2-8k-3 = (k-4)^2-19 \end{aligned}$$

gilt. Es gibt also ein geeignetes k für alle

$$n \in \bigcup_{k=9}^{\infty} I_k = [99, \infty),$$

was den Beweis abschließt. $\square$

Aufgabe 2: Man zeige, dass die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

für alle reellen Zahlen $x_1, \dots, x_n$ gilt.

Lösung: Es seien die Zahlen $x_1, \dots, x_n$ vorgegeben. Zählen wir zu jeder dieser Zahlen einen konstanten Wert t hinzu, erhalten wir Zahlen $x'_i = x_i + t$. Dies ändert den Wert L auf der linken Seite der Ungleichung nicht, und es gilt

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x'_i - x'_j|}.$$

Der Wert der rechten Seite ändert sich allerdings schon, und wir definieren

$$H(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x'_i + x'_j|} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j + 2t|}.$$

Sei nun T ein genügend großer Wert, sodass

$$H(-T) > L \quad \text{und} \quad H(T) > L$$

gilt. Die reellen Werte $-T$, T und $p_{ij} := -\frac{x_i+x_j}{2}$ (die nicht notwendigerweise alle verschieden sind) unterteilen die Zahlengerade in einige Strecken und zwei Strahlen. Innerhalb jedes diese Abschnitte ist die Funktion $H(t)$ konkav, da die Funktion $f(t) = \sqrt{|\ell + 2t|}$ sowohl im Intervall $(-\infty, -\ell/2]$ als auch im Intervall $[-\ell/2, \infty)$ konkav ist.

Nun sei $[a, b]$ das Intervall in dem der Wert 0 liegt. da $H(t)$ in diesem Intervall konkav ist, gilt sicher

$$H(0) \geq \min\{H(a), H(b)\}.$$

Da wir bereits wissen, dass $H(\pm T) > L$ gilt, genügt es zu zeigen, dass

$$H\left(-\frac{x_i + x_j}{2}\right) \geq L$$

für alle Paare (i, j) gilt. Mit anderen Worten, es bleibt noch die Gültigkeit der Ungleichung $H(t) \geq L$ für diejenigen Werte von t zu zeigen, für die es ein Paar (i, j) gibt mit $x'_i + x'_j = 0$.

Nehmen wir also an, wir wollen die Gültigkeit der Ungleichung für ein derartiges Paar nachweisen und es gilt $i = j$, also $x'_i = 0$ für ein Index i. Dann können wir diese Zahl x'_i streichen, was zur Folge hat, dass beide Seiten der Ungleichung um den gleichen Wert

$$2\sum_{k}\sqrt{|x'_k|}$$

verkleinert werden.

Gilt für das Paar $i \neq j$, also $x'_i = -x'_j$, so können wir beide Zahlen x'_i und x'_j streichen, was beide Seiten der Ungleichung um den Wert

$$2\sqrt{2|x'_i|} + 2 \cdot \sum_{k \neq i,j} \left(\sqrt{|x'_k + x'_i|} + \sqrt{|x'_k + x'_j|} \right)$$

verkleinert. In beiden Fällen ist der Nachweis der Gültigkeit der Ungleichung auf ihre Gültigkeit für einen kleineren Wert von n zurückgeführt. Da wir diesen Schritt wiederholt durchführen können, bleibt nur noch die Gültigkeit der Ungleichung für $n = 0$ und $n = 1$ nachzuweisen. In beiden Fällen ist die Gültigkeit der Aussage aber offensichtlich und der Beweis ist somit abgeschlossen. $\square$

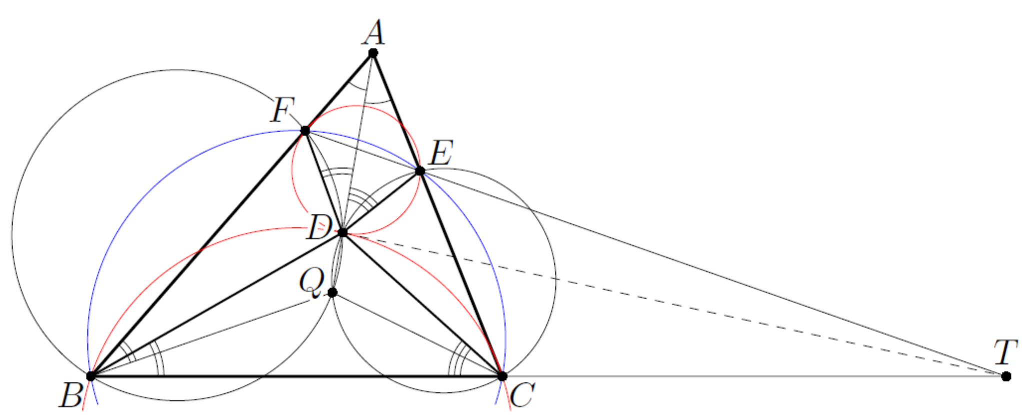
Aufgabe 3: Es sei D ein innerer Punkt des spitzwinkligen Dreiecks ABC mit $AB > AC$, für den $\angle DAB = \angle CAD$ gilt. Für den Punkt E auf der Strecke AC gilt $\angle ADE = \angle BCD$, für den Punkt F auf der Strecke AB gilt $\angle FDA = \angle DBC$, und für den Punkt X auf der Geraden AC gilt $CX = BX$. Es seien O_1 und O_2 die Umkreismittelpunkte der Dreiecke ADC beziehungsweise EXD. Man beweise, dass die Geraden BC, EF und O_1O_2 durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

Lösung: Es sei Q im Dreieck ABC der zu D isogonal konjugierte Punkt, also der gemeinsame Punkt der drei Geraden, die man erhält, wenn man AD, BD und CD an den jeweiligen Winkelsymmetralen in A bzw. B bzw. C spiegelt. Wegen $\angle DAB = \angle CAD$ liegt der Punkt D auf der Winkelsymmetralen in A, und dies gilt daher auch für den Punkt Q.

Nun gilt $\angle QBA = \angle DBC = \angle FDA$, und die Punkte Q, D, F und B liegen somit auf einem gemeinsamen Kreis. Analog gilt auch, dass die Punkte Q, D, E und C auf einem gemeinsamen Kreis liegen, und es folgt somit

$$AF \cdot AB = AD \cdot AQ = AE \cdot AC,$$

womit wir sehen, dass auch die Punkte B, F, E und C auf einem gemeinsamen Kreis liegen.



Nun sei T der Schnittpunkt der Geraden BC und FE. Wir beweisen die Gültigkeit des folgenden Lemmas:

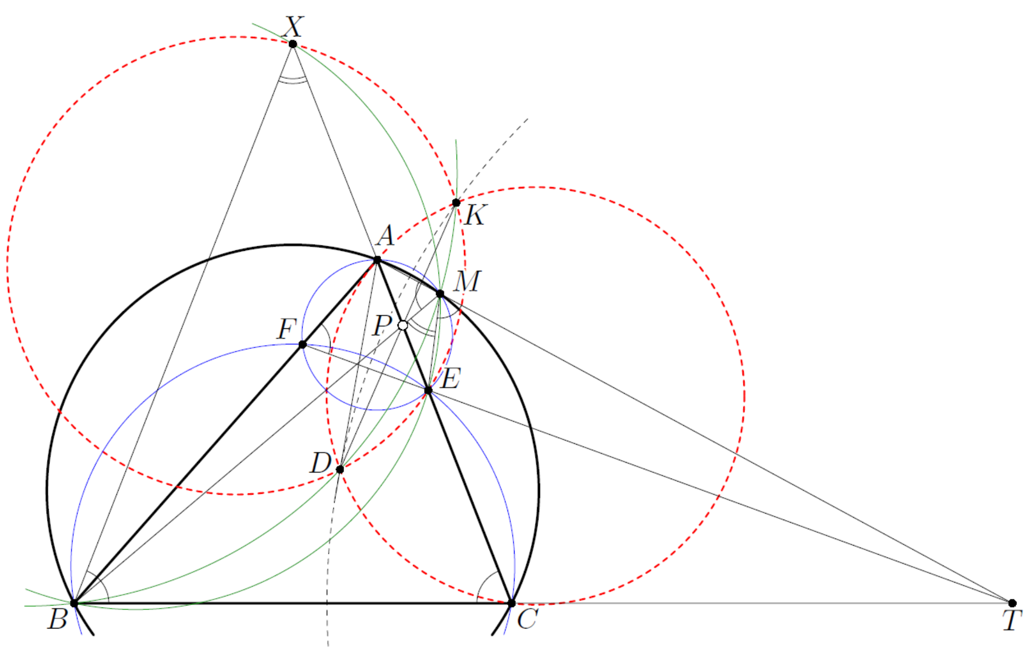
Lemma: Es gilt $TD^2 = TB \cdot TC = TF \cdot TE$.

Beweis des Lemmas: Aus den eben festgehaltenen Sehnenvierecken ergibt sich folgende Winkelbeziehung:

$$\begin{aligned}\angle FDB &= \angle DFA - \angle DBA \\ &= (180^\circ - \angle FAD - \angle ADF) - (\angle CBA - \angle CBD) \\ &= 180^\circ - \angle FAD - \angle CBA \\ &= 180^\circ - \angle DAE - \angle AEF \\ &= \angle FED + \angle EDA \\ &= \angle FED + \angle DCB.\end{aligned}$$

Nach dem Sehnen-Tangentenwinkelsatz haben die Umkreise von DEF und BCD somit eine gemeinsame Tangente in D, und es folgt, wie behauptet, aufgrund der Potenz von T bezüglich dieser beiden Kreise die behauptete Beziehung $TD^2 = TB \cdot TC = TF \cdot TE$. $\square$

Nach dieser Vorüberlegung sind wir nun bereit, den Beweis durchzuführen.



Es schneide TA den Umkreis von ABC ein zweites Mal in M. Da wir bereits wissen, dass $BCEF$ und $AMCB$ Sehnenvierecke sind, folgt aus dem Lemma

$$TM \cdot TA = TF \cdot TE = TB \cdot TC = TD^2,$$

und somit liegen auch die Punkte A, M, E und F auf einem gemeinsamen Kreis.

Nun betrachten wir die Inversion am Kreis mit Mittelpunkt T durch D. Diese Inversion bildet aufgrund dieser Beziehungen M auf A ab und B auf C. Da der Punkt D bei dieser Inversion fix bleibt, bildet die Inversion den Umkreis von MBD auf den Umkreis von ADC ab. Bezeichnen wir den zweiten Schnittpunkt dieser beiden Umkreise als K, so sehen wir, dass K ebenfalls ein Fixpunkt der Inversion sein muss, und somit auf dem Inversionskreis, also dem Kreis mit Mittelpunkt T durch D, liegen muss. Da somit $TD = TK$ gilt, sehen wir, dass die Mittelpunkte der beiden Umkreise ebenso wie T auf der Streckensymmetrale von DK liegen.

Da O_1 der Mittelpunkt des Umkreises von ADC ist, bleibt nur noch zu zeigen, dass die Punkte D, K, E und X auf einem gemeinsamen Kreis liegen, da der Mittelpunkt O_2 dieses Kreises dann ebenfalls auf der Streckensymmetrale von DK liegt.

Die Geraden BM, DK und AC sind die Potenzgeraden der Umkreise der Sehnenvierecke $ABCM$, $ACDK$ und $BMDK$, und schneiden sich somit im Potenzzentrum dieser drei Kreise, den wir als P bezeichnen. Da wir darüber hinaus auch wissen, dass M auf dem Umkreis von AEF liegt, gilt (modulo 180°)

$$\begin{aligned}
\angle(EX, XB) &= \angle(CX, XB) \\
&= \angle(XC, BC) + \angle(BC, BX) \\
&= 2 \cdot \angle(AC, CB) \\
&= \angle(AC, CB) + \angle(EF, FA) \\
&= \angle(AM, BM) + \angle(EM, MA) \\
&= \angle(EM, BM),
\end{aligned}$$

und die Punkte M, E, X und B liegen somit auch auf einem gemeinsamen Kreis. Es gilt also

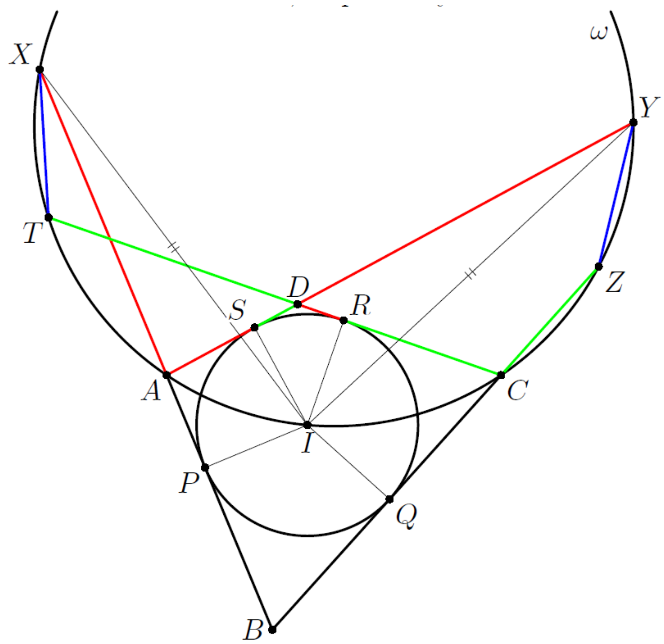
$$PE \cdot PX = PM \cdot PB = PK \cdot PD,$$

und die Punkte E, K, D und X liegen somit tatsächlich, wie behauptet, auf einem gemeinsamen Kreis, was den Beweis abschließt. □

Aufgabe 4: Es sei Γ ein Kreis mit dem Mittelpunkt I und $ABCD$ ein konvexes Viereck, dessen Seiten AB, BC, CD und DA den Kreis Γ berühren. Es sei Ω der Umkreis des Dreiecks AIC. Die Verlängerung von BA über A hinaus schneidet Ω in X, und die Verlängerung von BC über C hinaus schneidet Ω in Z, Die Verlängerungen von AD und CD über D hinaus schneiden Ω in Y beziehungsweise T. Man beweise

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Lösung: Die beschriebene Situation ist in der Figur dargestellt. Wir definieren die Berührpunkte von Γ mit den Strecken AB, BC, CD und DA der Reihe nach als P, Q, R und S.



Da der Punkt I als Inkreismittelpunkt von $ABCD$ auf der Winkelsymmetrale von $\angle DB$ liegt, ist es als Schnittpunkt der Außenwinkelsymmetrale des Dreiecks TCZ mit seinem Umkreis der Nordpol von TCZ. Der Punkt I liegt also auf der Streckensymmetrale von TZ und es gilt $IT = IZ$. Analog gilt dies auch im Dreieck YAX, da I auch auf der Außenwinkelsymmetrale dieses Dreiecks in A ligt, und daher auch der Nordpol dieses Dreiecks ist. Wir sehen also, dass somit auch $IX = IY$ gilt.

Bezeichnen wir den Mittelpunkt von Ω als O, so sehen wir, dass die beiden Punkte T und Z zur Achse OI symmetrisch liegen, und ebenso die beiden Punkte X und Y. Die Strecken XT und YZ liegen also bezüglich dieser Achse symmetrisch und es gilt $XT = YZ$.

Nun betrachten wir die beiden rechtwinkeligen Dreiecke IXP und IYS. Diese sind wegen $IP = IS$ und $IX = IY$ kongruent, und es folgt daher auch $XP = YS$. Analog sind auch die rechtwinkeligen Dreiecke IRT und IQZ wegen $IR = IQ$ und $IT = IZ$ kongruent und es folgt $RT = QZ$.

Schließlich wissen wir, dass Tangentenstrecken an einen Kreis gleich lang sind, und es gilt $AP = AS$, $BP = BQ$, $CQ = CR$ und $DR = DS$. Dies ergibt zusammengefasst

$$\begin{aligned}
AD + DT + TX + XA &= AS + SD + DT + XT + XA \\
&= XT + XA + AS + SD + DT \\
&= XT + XA + AP + DR + DT \\
&= XT + XP + RT \\
&= YZ + YS + QZ \\
&= YZ + YD + DS + CQ + CZ \\
&= YZ + YD + DR + RC + CZ \\
&= CD + DY + YZ + ZC,
\end{aligned}$$

wie behauptet. $\square$

Aufgabe 5: Die beiden Eichhörnchen Buschi und Hoppi haben 2021 Walnüsse für den Winter gesammelt. Hoppi nummeriert die Walnüsse von 1 bis 2021 und gräbt kleine Löcher entlang eines Kreises um ihren Lieblingsbaum. Am nächsten Morgen bemerkt Hoppi, dass Buschi in jedes Loch eine Walnuss gelegt hat, aber ohne die Nummerierung zu beachten. Verstimmt beschließt Hoppi, die Walnüsse umzuordnen, und führt dazu eine Folge von 2021 Zügen aus. Im k-ten Zug vertauscht Hoppi die Positionen der beiden Walnüsse, die direkt neben Walnuss k liegen. Man beweise, dass es eine ganze Zahl k derart gibt, dass Hoppi im k-ten Zug zwei Walnüsse a und b mit $a < k < b$ vertauscht.

Lösung: Wir nehmen an, es seien alle Nüsse zu Beginn grün gefärbt. Im ersten Schritt werden die Nüsse beiderseits von Nuss 1 vertauscht und wir wechseln dabei die Farbe von Nuss 1 von grün auf rot. In jedem weiteren Schritt gehen wir ebenso vor, und ändern die Farbe der Nuss, an der gespiegelt wird jeweils auf rot. Dies hat zur Folge, dass wir, wenn wir zum k-ten Schritt kommen, an der Nuss mit der Nummer k spiegeln wollen, deren Farbe in diesem Schritt auf rot wechseln wird. Alle Nüsse mit kleineren Zahlen waren schon bin zu diesem Zeitpunkt im Mittelpunkt einer Spiegelung, und sind daher zu diesem Zeitpunkt rot. Alle anderen waren noch nicht in dieser Situation und sind daher noch grün.

Nach dem ersten Schritt gibt es noch 2020 grüne Nüsse, die in einer Reihe liegen. Wir nehmen nun an, es wäre zu keinem Zeitpunkt der Fall, dass zwei Nüsse a und b an einer Nuss k gespiegelt werden mit $a < k < b$. Das bedeutet, dass a und b in jedem Schritt von gleicher Farbe sind. Wir wollen zeigen, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt.

Die Nuss mit der Nummer 2 kann nicht neben der Nuss mit der Nummer 1 liegen, da sie in diesem Fall zwischen einer roten und einer grünen Nuss liegen würde, was im Widerspruch zur Annahme stünde. Bei der Speigelung an Nuss 2 wird also diese Nuss rot, und diese rote Nuss teilt dann die durchgehende Reihe von 2020 grünen Nüssen in einen Bereich mit einer (positiven) geraden Anzahl von Nüssen und einem Bereich mit einer ungeraden Anzahl. Im Laufe des Prozesses werden alle Nüsse irgendwann rot. Immer, wenn eine Nuss an der Reihe ist, die sich im Bereich mit der geraden Anzahl grüner Nüsse befindet, teilt diese neue rote Nuss den Bereich in einen kleineren Bereich mit einer positiven geraden Anzahl grüner Nüsse und einem Bereich mit einer ungeraden Anzahl. Es bleibt also immer ein Bereich mit einer positiven geraden Anzahl, und dieser Bereich wird immer kleiner. Da die Anzahl der grünen Nüsse in diesem Bereich immer positiv ist, muss diese Zahl irgendwann den Wert 2 erreichen. Sobald eine dieser beiden grünen Nüsse als Zentrum der Spiegelung an der Reihe ist, liegt sie aber sicher zwischen einer roten und einer grünen Nuss. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass dies zu keinem Zeitpunkt der Fall ist, und die Gültigkeit der Behauptung ist somit gezeigt.

□

Aufgabe 6: Es seien $m \geq 2$ eine ganze Zahl, A eine endliche Menge von (nicht notwendigerweise positiven) ganzen Zahlen und $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ Teilmengen von A. Es werde vorausgesetzt, dass für jedes $1 \leq k \leq m$ die Summe der Elemente von B_k genau m^k beträgt. Man beweise, dass A mindestens $m/2$ Elemente enthält.

Lösung: Es sei $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Wir nehmen an, es gelte $k = |A| < m/2$. Wir bezeichnen die Summe aller Elemente von B_i als

$$s_i := \sum_{j;a_j \in B_i} a_j,$$

wobei wir gegeben haben, dass $s_i = m^i$ für $i = 1, \ldots, m$ gilt.
Nun betrachten wir alle m^m Ausdrücke der Gestalt

$$f(c_1, \ldots, c_m) := c_1 s_1 + c_2 s_2 + \ldots c_m s_m$$

mit $c_i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ für alle $i = 1, 2, \ldots, m$.
Jede Zahl $f(c_1, \ldots, c_m)$ ist von der Gestalt

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k \quad \text{mit} \quad \alpha_i \in \{0, 1, \ldots, m(m-1)\},$$

und es gibt somit darunter höchstens

$$(m(m-1)+1)^k < m^{2k} < m^m$$

verschiedene Zahlen. Nach SFS muss es darunter also mindestens zwei gleiche Zahlen geben. Da $s_i = m$ gilt, steht dies aber im Widerspruch zur eindeutigen Darstellbarkeit der Zahlen im Zahlensystem mit der Basis m, womit sicher $k \geq m/2$ wie behauptet gelten muss. $\square$