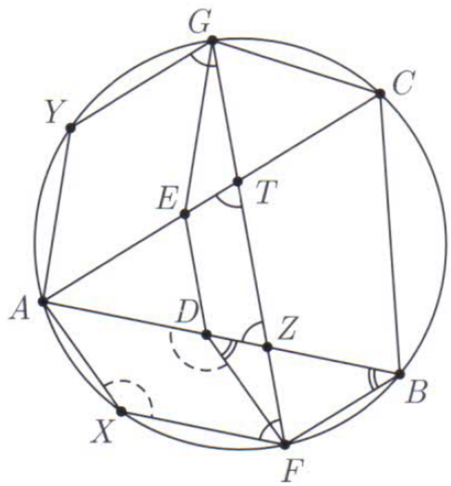
IMO 2018

Aufgabe 1: Es sei Γ der Umkreis eines spitzwinkligen Dreiecks ABC. Punkte D und E liegen so auf den Strecken AB bzw. AC, dass $AD = AE$ gilt. Die Mittelsenkrechten der Strecken BD und CE schneiden die kürzeren Kreisbögen AB bzw. AC von Γ in den Punkten F bzw. G. Man beweise, dass die Geraden DE und FG parallel oder gleich sind.

Lösung: Wir definieren Punkte $Z = AB \cap FG$ und $T = AC \cap FG$. Es genügt zu zeigen, dass das Dreieck AZT gleichschenkelig ist, da daraus sicher $DE \| FG$ folgt.



Um dies zu zeigen, betrachten wir den vierten Eckpunkt X des Parallelogramms $FXAD$. Wegen $FD = FB$ folgt

$$\angle FXA = \angle FDA = 180° - \angle FDB = 180° - \angle FBD,$$

und wir erkennen, dass $BFXA$ ein Sehnenviereck ist, womit X auf Γ liegt.

Definieren wir Y als vierten Eckpunkt des Parallelogramms $GYAE$, so liegt Y analog ebenfalls auf Γ, und wir sehen, dass alle vier Eckpunkte des Vierecks $XFGY$ auf Γ liegen. Wegen $FX = AD = AE = GY$ ist $XFGY$ somit ein gleichschenkeliges Trapez. Da $XF \| AZ$ und $YG \| AT$ gilt, erhalten wir somit

$$\angle ATZ = \angle YGF = \angle XFG = \angle AZT,$$

und AZT ist somit gleichschenkelig, wie behauptet. $\square$

Aufgabe 2: Man bestimme alle ganzen Zahlen $n \geq 3$, für die reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ existieren, so dass $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ und

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$ gelten.

Lösung: Derartige Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ existieren genau dann, wenn n ein Vielfaches von 3 ist.

Um die Notation zu vereinfachen, nehmen wir an, wir würden eine periodische unendliche Folge $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ mit der (nicht notwendigerweise minimalen) Periodenlänge n betrachten. Ist n durch 3 teilbar, so erfüllt die Folge $\langle -1, -1, 2, -1, -1, 2, \ldots \rangle$ offensichtlich die geforderte Bedingung.

Nun nehmen wir an, es sei eine periodische Folge gegeben, die die geforderte Bedingung erfüllt. Wir werden zeigen, dass eine positive Zahl in einer solchen Folge immer von zwei negativen Zahlen gefolgt werden muss, die wiederum ihrerseits von einer positiven Zahl gefolgt werden. Daraus folgt dann, dass n durch 3 teilbar sein muss.

Enthält die Folge zwei auf einander folgende positive Zahlen a_i und a_{i+1}, so folgt $a_{i+2} = a_i a_{i+1} + 1 > 1$, womit auch die nächste Zahl positiv ist. Induktiv folgt somit, dass alle Folgenglieder ab diesen positiv und größer als 1 sein müssen. Aus $a_{i+2} = a_i a_{i+1} + 1 > 1 \cdot a_{i+1} + 1 > a_{i+1}$ folgt aber in diesem Fall, dass die Folge ab diesem Glied streng monton steigend ist, im Widerspruch zur Annahme, sie sei periodisch. Es können also in der Folge niemals zwei positive Glieder auf einander folgen.

Kommt die Zahl $a_i = 0$ in der Folge vor, so gilt $a_{i+1} = a_{i-1}a_i + 1 = 1$ und $a_{i+2} = a_i a_{i+1} + 1 = 1$, womit die Folge aber zwei auf einander folgende positive Glieder enthält, was bereits als ausgeschlossen erkannt wurde. Die Zahl 0 kommt also in der Folge nicht vor.

Auf zwei negative Folgenglieder a_i und a_{i+1} folgt wegen $a_{i+2} = a_i a_{i+1} + 1 > 1$ sicher ein positives Folgenglied.

Die Vorzeichen in der Folge können auch nicht alternierend auftreten. Nehmen wir an, dies sei der Fall, und es gelte $a_i < 0$, $a_{i+1} > 0$, $a_{i+2} < 0$ und $a_{i+3} > 0$. In diesem Fall gilt $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2} < 0 < a_{i+3} = a_{i+1}a_{i+2} + 1$, und wegen $a_{i+1} > 0$ folgt hieraus $a_i < a_{i+2}$. Da dieses Argument induktiv fortgesetzt werden kann, sehen wir, dass die negativen Werte $a_i < a_{i+2} < a_{i+4} < \dots$ eine streng monoton steigende Teilfolge bilden, was im Widerspruch zur Periodizität der Folge steht. Auch dieser Fall ist somit ausgeschlossen.

Wir wissen also jetzt, dass die Folge sicher zwei auf einander folgende negative Glieder a_i und a_{i+1} enthält, die von einem positiven Glied a_{i+2} gefolgt werden, welches wiederum von einem negativen Glied a_{i+3} gefolgt wird. Es bleibt nur noch nachzuweisen, dass das nächstfolgende Folgenglied a_{i+4} ebenfalls negativ sein muss.

Zu diesem Zweck stellen wir fest, dass die Beziehung $a_{i+4} = a_{i+2}a_{i+3} + 1 < 1 < a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$ zu Folge hat, dass

$$a_{i+5} - a_{i+4} = (a_{i+3}a_{i+4} + 1) - (a_{i+2}a_{i+3} + 1) = a_{i+3}(a_{i+4} - a_{i+2}) > 0$$

gilt, und somit auch $a_{i+5} > a_{i+4}$. Von den beiden Zahlen a_{i+4} und a_{i+5} kann aber höchstens eine positiv sein, und es folgt somit, dass sicher $a_{i+4} < 0$ gilt.

Wir erkennen also, dass immer, wie behauptet, zwei negative Zahlen in der Folge von einer positiven gefolgt werden, die wiederum von zwei negativen gefolgt wird. Es muss also n wie behauptet sicher durch 3 teilbar sein. $\square$

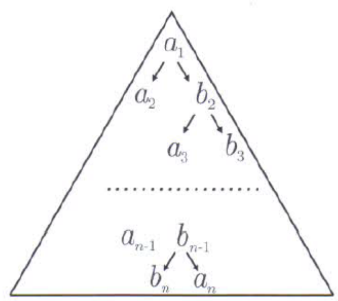
Aufgabe 3: Ein *anti-Pascalsches Dreieck* ist eine gleichseitig dreieckige Anordnung von Zahlen in der, mit Ausnahme der Zahlen in der untersten Zeile, jede Zahl gleich dem Absolutbetrag der Differenz der beiden unmittelbar darunter stehenden Zahlen ist. Zum Beispiel ist die folgende Anordnung ein anti-Pascalsches Dreieck mit vier Zeilen, das jede ganze Zahl von 1 bis 10 enthält.

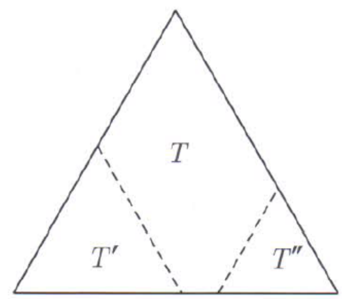
$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Existiert ein anti-Pascalsches Dreieck mit 2018 Zeilen, das jede ganze Zahl von 1 bis $1 + 2 + \dots + 2018$ enthält?

Lösung: Es existiert kein derartiges Dreieck.

Um dies einzusehen, nehmen wir an, es gäbe ein anti-Pascalsches Dreieck T mit n Zeilen, das alle ganzen Zahlen von 1 bis $1+2+\ldots+2018$ enthält. Sei, wie in der Abbildung dargestellt, die Zahl an der Spitze des Dreiecks mit a_1 bezeichnet. Die beiden darunter liegenden Zahlen sind dann irgend ein a_2 und $b_2 = a_1 + a_2$, und die beiden unter b_2 sind dann irgend ein a_3 und $b_3 = a_1 + a_2 + a_3$. Dies setzt sich bis in die letzte Zeile fort, wo es irgend ein a_n benachbart mit $b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ unmittelbar unter der Zahl $b_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$ gibt. Da die a_k paarweise verschiedene ganze Zahlen zwischen 1 und n sind, deren Summe gleich $1+2+\ldots+n$ ist, bilden sie eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$.





Nun betrachten wir in der rechten Figur die beiden gleichseitigen Teildreiecke T' und T'', deren untere Zeilen aus den Zahlen bestehen, die alle links bzw. alle rechts von den beiden Zahlen a_n und b_n liegen. (Wir bemerken, dass ein Dreieck eventuell auch keine Zahlen enthalten kann.) Die Anzahl der Zahlen in der untersten Zeile eines dieser Dreiecke beträgt $l \geq \lceil \frac{n-2}{2} \rceil$, und wir können obdA annehmen, dass dies für T' der Fall ist. Analog zum Argument im großen Dreieck, muss auch in T' eine Zahl in der unteren Zeile die Form $b_\ell = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_\ell$ haben, wobei die Zahlen $a'_1, \ldots, a_\ell$ alle in T' in den Zeilen darüber vorkommen, und paarweise verschieden sein müssen. Da die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ alle im Teil T liegen, sind diese Zahlen alle größer als n, und es gilt somit

$$\begin{aligned} b_\ell &\geq (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+\ell) = \frac{\ell(2n+\ell+1)}{2} \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \left(2n + \frac{n-2}{2} + 1 \right) = \frac{5n(n-2)}{8}, \end{aligned}$$

was aber für $n = 2018$ größer als $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ist. Dies ist ein offensichtlicher Widerspruch, und wir sehen, dass es in der Tat kein anti-Pascalsches Dreieck mit den geforderten Eigenschaften geben kann. □

Aufgabe 4: Ein *Knoten* ist ein Punkt (x, y) in der Ebene, für den sowohl x als auch y positive ganze Zahlen kleiner oder gleich 20 sind.

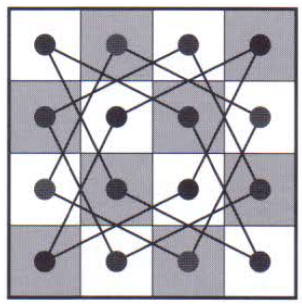
Zunächst ist jeder der 400 Knoten unbesetzt. Amy und Ben legen abwechselnd Steine auf die Knoten, wobei Amy beginnt. In jedem Zug von Amy legt sie einen neuen roten Stein so auf einen unbesetzten Knoten, dass der Abstand zwischen je zwei von roten Steinen besetzten Knoten ungleich $\sqrt{5}$ ist. In jedem Zug von Ben legt er einen neuen blauen Stein auf einen unbesetzten Knoten. (Ein Knoten, der von einem blauen Stein besetzt ist, darf einen beliebigen Abstand von jedem anderen besetzten Knoten haben.) Sie hören auf, sobald ein Spieler keinen Stein mehr legen kann.

Man bestimme das größte K, so dass Amy sicher mindestens K rote Steine legen kann, unabhängig davon, wie Ben seine blauen Steine legt.

Lösung: Die größte derartige Zahl K ist 100.

Eine Möglichkeit einzusehen, dass Any sicher 100 rote Steine legen kann besteht darin, die Knoten abwechselnd, nach Art eines Schachbretts, weiß und schwarz zu färben. Die Abstände zweier Knoten kann nur dann, wegen $\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$, gleich $\sqrt{5}$ sein, wenn die Knoten in dieser Färbung verschieden gefärbt sind. Legt Amy also ihre Steine nur auf schwarze Felder, so hat sie 200 Felder zu diesem Zweck zur Verfügung, und da sie mir Ben abwechslnd Steine legt, kann sie sicher mindestens 100 rote Steine legen.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass Ben ein Taktik besitzt, die verhindert, dass Amy mehr als 100 Steine legen kann.



Zu diesem Zweck betrachten wir einen 4×4 Abschnitt des Spielbereichs. Dieser Abschnitt kann, wie in der Abbildung zu sehen ist, in vier Zyklen aufgeteilt werden, die jeweils aus vier Knoten bestehen, deren Abstände paarweise jeweils im Zyklus $\sqrt{5}$ betragen. Wir können also in jedem derartigen Zyklus die Knoten als A-B-C-D-A bezeichnen. Legt Amy ihren roten Stein in einem solchen Zyklus z.B. auf Feld A, kann Ben seinen blauen Stein auf das diaginal gegenüber liegende Feld C legen. Dies blockiert für das Weitere für Amy all Steine des Zyklus, da A und C schon besetzt sind, und B und D von A jeweils den Abstand $\sqrt{5}$ haben. Da der gesamte 20×20 Bereich in Abschnitte der Größe 4×4 aufgeteilt werden kann, liegen alle Knoten in getrennten derartigen Zyklen, und Ben kann somit bewirken, dass Amy in jedem Zyklus höchstens einen Knoten belegen kann. Wir sehen, dass Ben mit dieser Taktik erreichen kann, dass Amy nicht mehr als 100 rote Steine legen kann, und der Beweis ist fertig. $\square$

Aufgabe 5: Es sei $a_1, a_2, \ldots$ eine unendliche Folge positiver ganzer Zahlen. Es sei angenommen, dass eine ganze Zahl $N > 1$ existiert, so dass für jedes $n \geq N$ die Zahl

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

ganz ist. Man beweise, dass es eine positive ganze Zahl M gibt, so dass $a_m = a_{m+1}$ für alle $m \geq M$ gilt.

Lösung: Um diese Behauptung zu beweisen, wird es hilfreich sein, zwei Lemmata zur Verfügung zu haben. Zu diesem Zweck seien a, b und c positive ganze Zahlen, für welche $N = \frac{b}{c} + \frac{c-b}{a}$ ebenfalls eine ganze Zahl ist. Dann gilt

Lemma 1: $\mathrm{ggT}(a, c) = 1 \Rightarrow c|b$.

Dies folgt unmittelbar aus der Schreibweise $ab = c(aN + b - c)$.

Lemma 2: $\operatorname{ggT}(a,b,c) = 1 \Rightarrow \operatorname{ggt}(a, b = 1)$.

Dies folgt aus der Schreibweise $c^2 - bc = a(cN - b)$, da ein gemeinsamer Primteiler von a und b sicher a teilt, und somit auch c^2, was nicht möglich ist.

Nun definieren wir

$$s_n := \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

und $\delta_n = \operatorname{ggT}(a_1, a_n - a_{n+1})$. Wir können nun schreiben

$$s_{n+1} - s_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1} = \frac{a_n/\delta_n}{a_{n+1}/\delta_n} + \frac{a_{n+1}/\delta_n - a_n/\delta_n}{a_1/\delta_n},$$

und dies ist sicher eine ganze Zahl für $n \geq k$. Da nun auch $\operatorname{ggT}(a_1/\delta_n, a_n/\delta_n, a_{n+1}/\delta_n) = 1$ gilt, folgt aus Lemma 2, dass auch $\operatorname{ggT}(a_1/\delta_n, a_n/\delta_n) = 1$ gilt. Es sei nun $d_n = \operatorname{ggT}(a_1, a_n)$. Wegen $d_n = \delta_n \cdot \operatorname{ggT}(a_1/\delta_n, a_n/\delta_n) = \delta_n$ teilt somit d_n auch a_{n+1}, und es folgt somit, dass auch $d_n | d_{n+1}$ gilt.

Wir sehen, dass die d_n ab einem gewissen Index eine monoton steigende Folge von ganzen Zahlen bilden, die durch a_1 beschränkt sind, und es gilt somit für einen Index ℓ, dass $d_n = d$ für alle $n \geq \ell$ gilt.

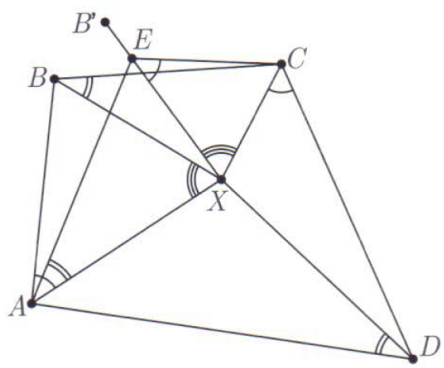
Schließlich folgt wegen $\operatorname{ggT}(a_1/d, a_{n+1}/d) = 1$ aus Lemma 1, dass der Ausdruck a_n/d von a_{n+1}/d geteilt wird, und somit gilt aber $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \geq \ell$, woraus die Gültigkeit der Behauptung folgt. $\square$

Aufgabe 6: Ein konvexes Viereck $ABCD$ erfülle die Bedingung $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Ein Punkt X liege so im Inneren von $ABCD$, dass

$$\sphericalangle XAB = \sphericalangle XCD \quad \text{und} \quad \sphericalangle XBC = \sphericalangle XDA.$$

Man beweise, dass $\sphericalangle BXA + \sphericalangle DXC = 180°$ gilt.

Lösung: Es sei B' der zu B symmetrische Punkt bezüglich der Winkelsymmetrale von $\angle AXC$. Dann gilt $\angle AXB' = \angle CXB$ und $\angle CXB' = \angle AXB$. Wenn die Punkte X, D und B' auf einer gemeinsamen Geraden liegen, ist bereits alles gezeigt. Im Folgenden nehmen wir also an, diese drei Punkte seien nicht kollinear.



Wir wählen den Punkt E auf dem Strahl XB' so, dass $XE \cdot XB = XA \cdot XC$ gilt. Dann folgt $\triangle AXE \sim \triangle BXC$ und $\triangle CXE \sim \triangle BXA$. Wegen $\angle XCE + \angle XCD = \angle XBA + \angle XAB < 180°$ und $\angle XAE + \angle XAD = \angle XDA + \angle XAD < 180°$ liegt der Punkt X im Innenbereich der Winkel

$\angle ECD$ und $\angle EAD$ des Vierecks $EACD$. Außerdem liegt der Punkt X sicher im Inneren eines der beiden Dreiecke EAD und ECD und im Äußeren des anderen.

Aufgrund der Dreiecksähnlichkeiten gilt $XA \cdot BC = XB \cdot AE$ und $XB \cdot CE = XC \cdot AB$. Multiplizieren wir diese Gleichungen mit der gegebenen Beziehung $AB \cdot CD = BC \cdot DA$, erhalten wir $XA \cdot CD \cdot CE = XC \cdot AD \cdot AE$, was gleichwertig ist mit

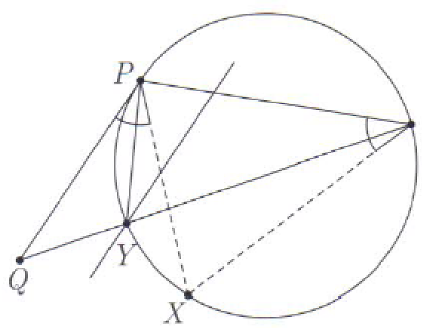
$$\frac{XA \cdot DE}{AD \cdot AE} = \frac{XC \cdot DE}{CD \cdot CE}.$$

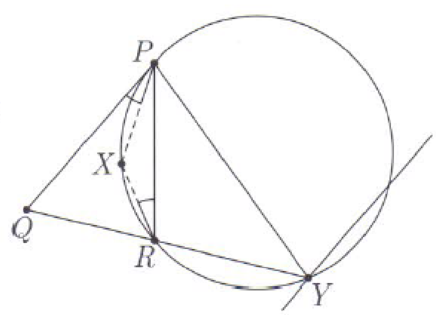
Nun werden wir zeigen, dass dies im Widerspruch zu den bisher festgestellten Tatsachen steht. Dies folgt aus folgenden Lemma.

Lemma: Es sei PQR ein Dreieck und X ein Punkt im Inneren des Winkels QPR, sodass $\angle QPX = \angle PRX$ gilt. Dann gilt die Beziehung $\frac{PX \cdot QR}{PQ \cdot PR} < 1$ genau dann, wenn X im Inneren des Dreiecks PQR liegt.

Beweis des Lemmas: Der geometrische Ort aller Punkte X mit $\angle QPX = \angle PRX$ im Inneren des Winkels QPR ist ein Bogen α des Kreises γ, der durch R geht und PQ in P berührt. Es schneide γ die Gerade QR ein zweites Mal in Y. (Wenn γ die Gerade QR berührt, nehmen wir $Y = R$.) Aus der Ähnlichkeit $\triangle QPY \sim \triangle QRP$ folgt $PY = \frac{PQ \cdot PR}{QR}$. Es genügt also nun zu zeigen, dass $PX < PY$ genau dann gilt, wenn X im Inneren des Dreiecks PQR liegt.

Zu diesem Zweck bezeichne m die Gerade durch Y und parallel zu PQ. Wir stellen fest, dass die Punkte von γ, die die Bedingung $PZ < PY$ erfüllen, genau diejenigen sind, die zwischen m und PQ liegen. Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden:





Fall 1: Y liegt auf der Strecke QR (siehe Bild links)

In diesem Fall teilt der Punkt Y den Bogen α in zwei Teile, PY und YR. Der Bogen PY liegt im Inneren ds Dreiecks PQR und der Bogen PY liegt zwischen m und PQ, und es gilt somit $PX < PY$ für $X \in PY$. Der andere Bogen YR liegt außerhalb des Dreiecks PQR, und YR liegt somit auf der anderen Seite von m relativ zu P, womit $PX > PY$ für $X \in YR$ gilt.

Fall 2: Y liegt auf dem Strahl QR, jenseits von R (siehe Bild rechts)

In diesem Fall liegt der gesamte Bogen α innerhalb des Dreiecks PQR und zwischen m und PQ, womit $PX < PY$ für alle $X \in \alpha$ gilt.

Die Gültigkeit des Lemmas ist somit gezeigt.

Anwendung dieses Lemmas auf die Lage von X relativ zu den beiden Dreiecken EAD und ECD zeigt also, dass genau einer der beiden Ausdrücke $\frac{XA \cdot DE}{AD \cdot AE}$ und $\frac{XC \cdot DE}{CD \cdot CE}$ kleiner als 1 ist, was den behaupteten Widerspruch ergibt. $\square$