IMO 2015

Aufgabe 1: Wir nennen eine endliche Menge $\mathcal{S}$ von Punkten in der Ebene *balanciert*, falls es zu je zwei verschiedenen Punkten A und B aus $\mathcal{S}$ einen Punkt C in $\mathcal{S}$ mit $AC = BC$ gibt. Wir bezeichnen $\mathcal{S}$ als *zentrumsfrei*, wenn es für keine paarweise verschiedenen Punkte A, B und C aus $\mathcal{S}$ einen Punkt P in $\mathcal{S}$ mit $PA = PB = PC$ gibt.

(a) Man zeige, dass für jedes $n \geqslant 3$ eine balancierte Menge von n Punkten existiert.

(b) Man bestimme alle ganzen Zahlen $n \geqslant 3$, für die eine balancierte zentrumsfreie Menge von n Punkten existiert.

Lösung: a) Wir nehmen zuerst an, dass n ungerade ist, und betrachten ein regelmäßiges n-eck. Es seien die Eckpunkte des n-ecks gegen den Uhrzeigersinn mit $A_1, \ldots, A_n$ bezeichnet. Diese Punktmenge ist jedenfalls balanciert, da zu je zwei Punkten A_i und A_j der Punkt A_k mit $2k = i + j \pmod n$ die Eigenschaft $A_iA_k = A_jA_k$ hat.

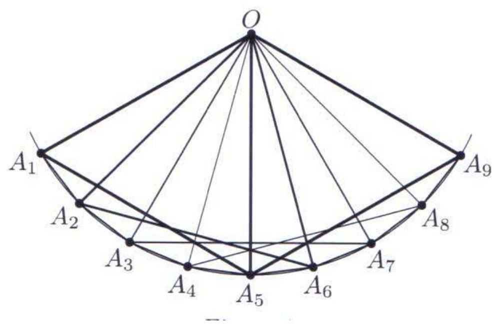

Abbildung 1

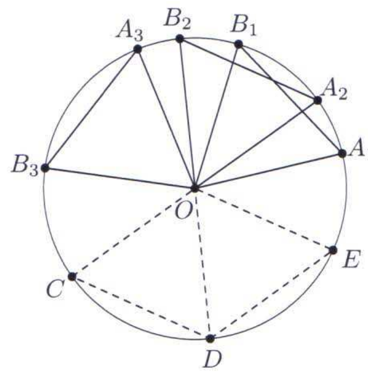

Abbildung 2

Nun sei n gerade. In diesem Fall betrachten wir die Eckpunkt $A_1, \ldots, A_{n-1}$ eines regelmäßigen $(3n-6)$-ecks zusammen mit seinem Mittelpunkt O. (Der Fall $n = 10$ ist in Abbildung 1 dargestellt.) Für je zwei Punkte A_i und A_j mit $1 \leq i, j \leq n-1$ gilt $OA_i = OA_j$. Für die beiden Punkte O und A_i bemerken wir, dass das Dreieck $OA_iA_{\frac{n}{2}-1+i}$ für alle $i \leq \frac{\pi}{2}$ gleichseitig ist. Es gilt daher für $i \leq \frac{\pi}{2}$: $OA_{\frac{n}{2}-1+i} = A_iA_{\frac{n}{2}-1+i}$ und für $i > \frac{\pi}{2}$: $OA_{i-\frac{n}{2}+1} = A_iA_{i-\frac{n}{2}+1}$. Die Punktmenge ist also balanciert, was den Beweis von a) abschließt. $\square$

b) Wir werden zeigen, dass eine derartige Punktmenge für jedes ungerade n existiert, aber für kein gerades n.

Es sei zunächst n ungerade. Wenn wir, wie in Teil a), wieder die Eckpunkte eines regelmäßigen n-ecks betrachten, wissen wir bereits aus Teil a), dass diese Punktmenge balaciert ist. Die Menge ist auch sicher zentrumsfrei. Wären nämlich A, B und C Punkte aus dieser Menge und P ein Punkt mit $PA = PB = PC$, so wäre P der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC und somit der Umkreismittelpunkt des n-ecks. Dieser Punkt gehört aber sicher nicht zur Punktmenge. Für ungerade $n \geq 3$ existiert also immer eine balacierte, zentrumsfreie Punktmenge.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass eine solche Punktmenge für gerade Werte von n niemals existieren kann. Sei zu diesem Zweck eine Menge M angenommen, die aus n Punktren besteht (mit geradem n), und die balanciert und zentrumsfrei ist. Für ein Paar $A, B \in M$ bezeichnen wir einen Punkt $C \in M$ als *assoziiert* mit dem Paar (A, B), wenn $AC = BC$ gilt. Da es $\frac{n(n-1)}{2}$ Paare von Punkten in M gibt, gibt es sicher nach SFS einen Punkt $P \in M$, der mit mindestens $\left\lceil \frac{n(n-1)}{2} : 2 \right\rceil = \frac{n}{2}$ Paaren assoziiert ist. Offensichtlich kann P keinem dieser Paare angehören, und die Vereinigung dieser $\frac{n}{2}$ Paare besteht also aus höchstens $n-1$ Punkten. Es muss also unter den $\frac{n}{2}$ Paaren zwei Paare geben, die einen Punkt gemeinsam haben. Bezeichnen wir diese Paare mit (A, B) und (A, C), folgt somit $PA = PB = PC$, was ein Widerspruch ist. Es kann also, wie behauptet, keine solche Menge M mit einer geraden Anzahl von Elementen existieren. Balancierte und zentrumsfreie Punktmengen mit n Elementen existieren somit, wie behauptet, genau für alle ungerade $n \geq 3$. □

Aufgabe 2: Man bestimme alle Tripel (a, b, c) positiver ganzer Zahlen, sodass jede der Zahlen

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

eine Zweierpotenz ist.

(*Eine Zweierpotenz ist eine ganze Zahl der Form 2^n, wobei n eine nichtnegative ganze Zahl ist.*)

Lösung: Wie leicht nachgerechnet werden kann, erfüllen $(2, 2, 2)$ und alle Pemutationen von $(2, 2, 3)$, $(2, 6, 11)$ und $(3, 5, 7)$ diese Bedingung. Um zu zeigen, dass diese 16 genau die gesuchten Tripel sind, gehen wir folgendermaßen vor.

Es sei (a, b, c) ein Tripel mit der gewünschten Eigenschaft mit $a \leq b \leq c$. (Dies darf oBdA angenommen werden, da jede Pemutation eines Lösungstripels aufgrund der Symmetrie der Ausdrücke ebenfalls eine Lösung sein muss.) Wäre $a = 1$, so wäre $ab - c = b - c \leq 0$ sicher keine Zweierpotenz. Im Folgenden können wir also $2 \leq a \leq b \leq c$ annehmen.

Fall 1: $a = b$ (Hinweis: Dieses Argument gilt analog für $b = c$.)

In diesem Fall sind $a^2 - c$ und $a(c - 1)$ Zweierpotenzen und es müssen somit sowohl a als auch $c - 1$ Zweierpotenzen sein. Es gibt also natürliche Zahlen α und γ mit $a = 2^\alpha$ und $c = 2^\gamma + 1$. Da $a^2 - c = 2^{2\alpha} - 2^\gamma - 1$ eine Zweierpotenz ist, gilt $a^2 - c = 2^{2\alpha} - 2^\gamma - 1 \not\equiv -1 \pmod 4$, und somit $\gamma \leq 1$. Da sowohl $2^{2\alpha} - 2$ (für $\gamma = 0$) als auch $2^{2\alpha} - 3$ (für $\gamma = 1$) nur für $\alpha = 1$ Zweierpotenzen sein können, erhalten wir in diesem Fall die Lösungen $(2, 2, 2)$ und $(2, 2, 3)$ (mit Permutationen).

Fall 2: a, b und c sind paarweise verschiedene Zahlen.

In diesem Fall können wir wegen der Symmetrie oBdA $2 \leq a < b < c$ annehmen. Aufgrund der Voraussetzungen gilt sicher

$$bc - a = 2^\alpha, \quad ca - b = 2^\beta \quad \text{und} \quad ab - c = 2^\gamma$$

mit $\alpha > \beta > \gamma$. Wir unterteilen der Fall in Unterfälle.

Fall 2.1: $a = 2$

Wir wollen zeigen, dass in diesem Fall $\gamma = 0$ gilt. Nehmen wir an, es sei $\gamma > 0$. Wegen $ab - c = 2b - c = 2^\gamma$ ist dann c gerade und wegen $ca - b = 2^\beta$ ist dann auch b gerade. Sind aber b und c beide gerade, gilt $bc - a \equiv 2 \pmod 4$, und $bc - a = 2^\alpha$ ist in diesem Fall nur möglich wenn $2^\alpha = 2$, und somit $bc = 4$ gilt. Dies widerspricht die Voraussetzung $2 < b < c$ und es folgt somit $\gamma = 0$ und daher $c = 2b - 1$.

Einsetzen in $ac - b = 2^\beta$ ergibt in diesem Fall also $2b - 2 = 2^\beta$. Wegen $b > 2$, d.h. $b \geq 4$, ist dies nur für $\beta \geq 4$ möglich.

$\beta = 4$ ergibt $3b - 2 = 2^4 \iff b = 6$ und somit $c = 11$ und wir erhalten die Lösung $(2, 6, 11)$. Zu betrachten bleibt also der Fall $\beta \geq 5$. Aus $bc - a = 2^\alpha$ folgt in diesem Fall

$$9 \cdot 2^\alpha = 9b(2b - 1) - 2 \cdot 9 = 18b^2 - 9b - 2 - 16 = (3b - 2)(6b + 1) - 16 = 2^\beta \cdot (2^{\beta+1} + 5) - 16.$$

Wegen $\beta \geq 5$ ist die rechte Seite dieses Ausdrucks nicht durch 32 teilbar und es gilt daher $\alpha \leq 4$ im Widerspruch zu $\alpha > \beta \geq 5$. Wir sehen, dass es im Fall $a = 2$ keine weiteren Lösungen gibt.

Fall 2.2: $a \geq 3$
Wir wählen zuerst $\vartheta \in \{\pm 1\}$ so, dass $c - \vartheta$ nicht durch 4 teilbar ist. Dann ist

$$2^\alpha + \vartheta \cdot 2^\beta = (bc - a\vartheta^2) + \vartheta(ca - b) = (b + a\vartheta)(c - \vartheta)$$

durch 2^β teilbar. Somit ist $b + a\vartheta$ sicher durch $2^{\beta-1}$ teilbar. Andererseits gilt wegen

$$2^\beta = ac - b > ac - c = (a-1)c \geq 2c,$$

und somit $2^{\beta-1} \geq c > b > a$, dass a und b jeweils kleiner als $2^{\beta-1}$ sein müssen. Dies ist nur möglich wenn $\vartheta = 1$ und $a + b = 2^{\beta-1}$ gilt. Nun folgt aus $ac - b = 2^\beta$

$$ac - b = 2(a+b) \iff a + 3b = ac - a.$$

Wegen $4b > a + 3b = a(c-1) \geq ab$ gilt dann $a = 3$. Aus $ac - b = 2(a+b)$ erhalten wir also $3c - b = 2(3+b) \iff c = b + 2$ und wegen $bc - a = 2^\alpha$ ist

$$bc - a = b(b+2) - 3 = b^2 + 2b - 3 = (b+3)(b-1)$$

eine Zweierpotenz. Somit sind $b - 1$ und $b + 3$ jeweils Zweierpotenzen, und dies ist nur möglich für $b = 5$ und somit $c = 7$. Als letzte Lösung erhalten wir also in diesem Fall $(3, 5, 7)$. $\square$

Aufgabe 3: Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB > AC$. Es seien Γ sein Umkreis, H sein Höhenschnittpunkt und F der Höhenfußpunkt von A. Ferner sei M der Mittelpunkt von BC. Es bezeichne Q den Punkt auf Γ mit $\angle HQA = 90°$ und K den Punkt auf Γ mit $\angle HKQ = 90°$. Dabei sei angenommen, dass die Punkte A, B, C, K und Q paarweise verschieden sind und in dieser Reihenfolge auf Γ liegen. Man beweise, dass sich die Umkreise der Dreiecke KQH und FKM berühren.

Lösung: Es sei A' der zu A diametral gegenüberliegende Punkt auf Γ. Wegen $\angle AQA' = 90° = \angle AQH$ liegen die Punkte Q, H und A' kollinear. Definieren wir nun Q' als diametral gegenüberliegenden Punkt zu Q auf Γ, gilt auch analog wegen $\angle QKQ' = 90° = \angle QKH$, dass K, H und Q' ebenfalls kollinear liegen.

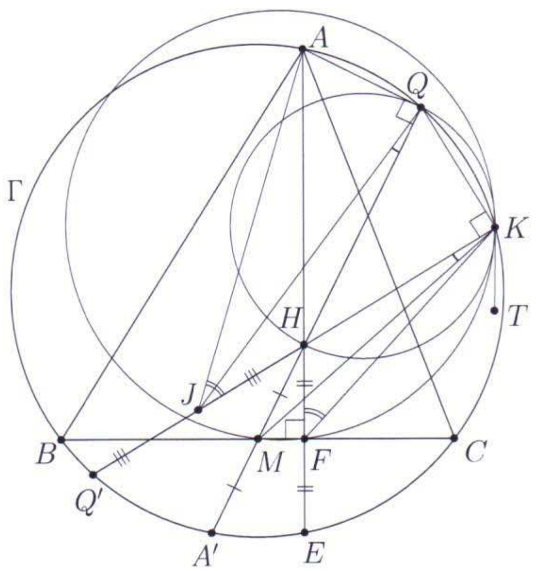

Abbildung 3

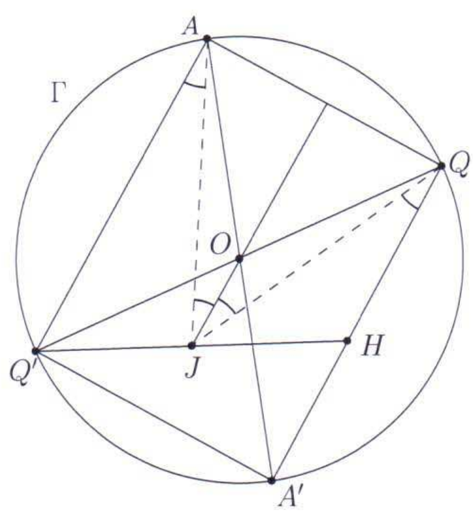

Abbildung 4

Nun sei E der zweite Schnittpunkt von der Geraden AF mit Γ. Es ist bekannt, dass F der Mittepunkt von HE ist. (Wegen $\angle EBC = \angle EAC = 90^\circ - \gamma = \angle CBH$ und $ECB = \angle EAB = 90^\circ - \beta = \angle BCH$ sind die Dreiecke $\triangle EBC$ und $\triangle HBC$ kongruent.) Weiters ist M der Mittelpunkt von HA'. (Wegen $MB = MC$, $\angle A'MB = \angle HMC$ und $\angle HCM = 90^\circ - \beta = \angle ABA' - \angle ABM = \angle MBA'$ sind auch die Dreiecke $\triangle A'MB$ und $\triangle HMC$ kongruent.) Nun sei J der Mittelpunkt von HQ'. Dann sind also F, M und J der Reihe nach die Mittelpunkte der Strecken HE, HA' und HQ'.

Wir zeichnen eine Tangente an den Umkreis von KQH in K und markieren einen Punkt T azf dieser Tangente derart, dass Q und T auf verschiedenen Seiten von KH liegen, wie in Abbildung 3. Dann gilt sicher $\angle HKT = \angle HQK$ nach dem Sehnen-Tangentenwinkelsatz. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass KT auch eine Tagente des Umkreises von KFM ist.

Zu diesem Zweck genügt es, wieder aufgrund des Sehnen-Tamgemtenwinkelsatzes zu zeigen, dass $\angle MKT = \angle CFK$ gilt (da dies mit $\angle MFK = 180^\circ - \angle MKT$ gleichwertig wäre.) Wegen $\angle HQK = \angle HKT = \angle MKT + \angle HKM$ ist dies gleichwertig mit $\angle HQK = \angle CFK + \angle HKM$.

Nun bemerken wir, dass $\angle HQK = 90^\circ - \angle QHK = 90^\circ - \angle Q'HA'$ gilt, und ebenso $\angle CFK = 90^\circ - \angle KFA$ (da F der Höhenfußpunkt von A ist). Wir erkennen also, dass die zu beweisende Behauptung auch in der Form $90^\circ - \angle Q'HA' = 90^\circ - \angle KFA + \angle HKM$ geschrieben werden kann, oder auch als

$$\angle Q'HA' = \angle KFA - \angle HKM.$$

Nun betrachten wir die Dreiecke KHE und AHQ'. Diese sind sicher ähnlich, da $\angle KHE = \angle AHQ'$ Scheitelwinkel sind und $\angle Q'AH = \angle Q'AE = \angle Q'KE = \angle HKE$ aufgrund des Peripheriewinkelsatzes gilt. Da J der Mittelpunkt von HQ' ist, und F der Mittelpunkt von HE, gilt somit $\angle KFA = \angle KFH = \angle HJA$. Analog sind auch die Dreiecke KHA' und QHQ' ähnlich, M der Mittelpunkt von HA' und J der Mittelpunkt von HQ', und somit $\angle HKM = \angle JQH$. Für die nachzuweisende Behauptung haben wir also

$$\angle Q'HA' = \angle KFA - \angle HKM = \angle Q'HA' = \angle HJA - \angle JQH.$$

Um nun dies zu zeigen, betrachten wir die hervorgehobenen Details in Abbildung 4.

Im Dreieck JHQ gilt offesichtlich

$$\angle Q'HA' = \angle JHA' = \angle JQH + \angle HJQ.$$

Außerdem gilt

$$\angle HJA = \angle HJQ + \angle QJA,$$

und es bleibt somit

$$\begin{aligned} & \angle Q'HA' = \angle HJA - \angle JQH \\ \iff\quad & \angle JQH + \angle HJQ = \angle HJQ + \angle QJA - \angle JQH \\ \iff\quad & 2 \cdot \angle JQH = \angle QJA \end{aligned}$$

zu zeigen. Die folgt aber aus der Tatsache, dass $AQA'Q'$ ein Rechteck mit Mittelpunkt O ist und J als Mittelpunkt von HQ' auf der Mittenparallele von QA' und $Q'A$ liegt, womit der Beweis abgeschlossen ist. □

Aufgabe 4: Das Dreieck ABC hat den Umkreis Ω und den Umkreismittelpunkt O. Ein Kreis Γ mit Mittelpunkt A schneidet die Strecke BC in den Punkten D und E, sodass B, D, E und C alle verschieden sind und in dieser Reihenfolge auf der Geraden BC liegen. Es seien F und G die Schnittpunkte von Γ und Ω, sodass A, F, B, C und G in dieser Reihenfolge auf Ω liegen.

Ferner sei K der zweite Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks BDF mit der Strecke AB. Außerdem sei L der zweite Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks CGE mit der Strecke CA. Es sei angenommen, dass die Geraden FK und GL verschieden sind und sich im Punkt X schneiden. Man beweise, dass X auf der Geraden AO liegt.

Lösung: Es genügt zu diesem Zweck zu zeigen, dass die Geraden FK und GL symmetrisch liegen bezüglich AO.

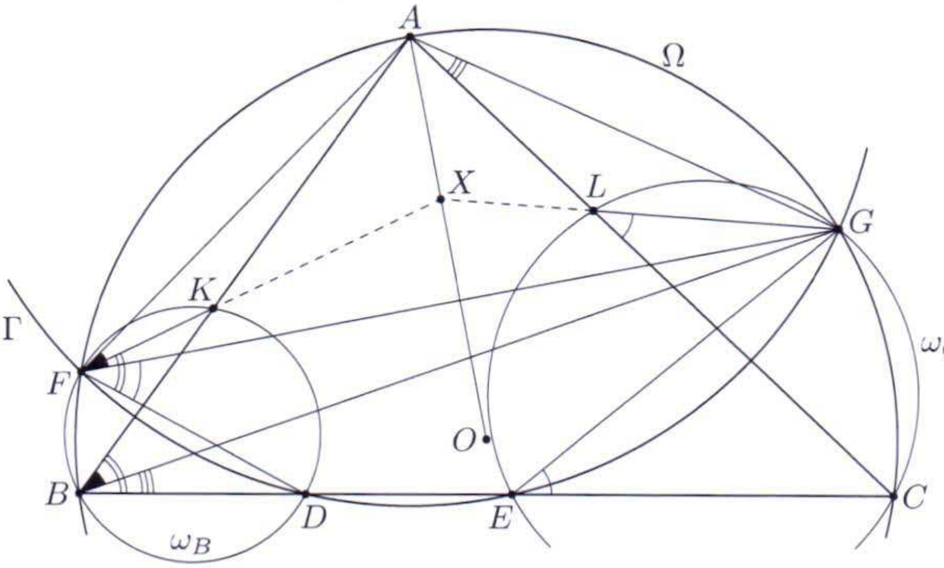

Abbildung 5

Da AF und AG gleich lange Sehnen von Ω sind, geht die Winkelsymmetrale von $\angle FAG$ sicher durch O. Können wir also zeigen, dass die Dreiecke AXF und AXG symmetrisch bezüglich AO liegen, gilt $\angle FAX = \angle GAX$ und O liegt somit auf AX. Zu diesem Zweck wollen wir also zeigen, dass $\angle KFA = \angle AGL$ gilt.

Wir bemerken zuerst, dass

$$\angle KFA = \angle DFG + \angle GFA - \angle DFK$$

gilt. Nun gilt aber im Kreis Γ sicher $\angle DFG = 180^\circ - \angle DEG = \angle CEG$. In Ω gilt $\angle GFA = \angle GBA$ und im Umkreis von BDF gilt $\angle DFK = \angle DBK$. Somit folgt also

$$\begin{aligned}\angle KFA &= \angle DFG + \angle GFA - \angle DFK \\ &= \angle CEG + \angle GBA - \angle DBK \\ &= \angle CEG - \angle CBG.\end{aligned}$$

Im Umkreis von CEG gilt $\angle CEG = \angle CLG$, und in Ω gilt $\angle CBG = \angle CAG$. Wir erhalten also

$$\angle KFA = \angle CEG - \angle CBG = \angle CLG - \angle CG = \angle AGL$$

im Dreieck AGL, womit die Behauptung gezeigt ist. □

Aufgabe 5: Es sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Gleichung

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \; = \; x + f(x+y) + yf(x)$$

für alle reellen Zahlen x und y erfüllen.

Lösung: Wir wollen zeigen, dass die Funktionen $x \mapsto x$ und $x \mapsto 2-x$ genau die Lösungen dieder Funktionalgleichung sind. Wegen

$$x + x + y + xy = x + x + y + yx$$

und

$$2 - (x + 2 - (x + y)) + 2 - (xy) = x + 2 - (x + y) + y(2 - x) \iff 2 + y - xy = 2 + y - xy$$

sind dies tatsächlich Lösungen. Wir wollen zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt.
Setzen wir $y = 1$ in der Gleichung

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x), \tag{1}$$

erhalten wir

$$f(x + f(x + 1)) = x + f(x + 1). \tag{2}$$

Es ist also $x + f(x + 1)$ für alle reellen x ein Fixpunkt von f. Nun unterscheiden wir zwei Möglichkeiten für $f(0)$.
Fall 1: $f(0) \neq 0$
Setzen wir in (1) $x = 0$, erhalten wir

$$f(f(y)) + f(0) = f(y) + yf(0).$$

Ist also y_o ein beliebiger Fixpunkt von f, erhalten wir durch Einsetzen von $y = y_o$ in dieser Gleichung

$$y_o + f(0) = y_o + y_o \cdot f(0),$$

und somit $y_o = 1$. Wegen (2) gilt also in diesem Fall für alle $x \in \mathbf{R}$

$$x + f(x + 1) = 1,$$

was aber gleichwertig ist mit $f(x) = 2 - x$ für alle $x \in \mathbf{R}$.
Fall 2: $f(0) = 0$
Setzen wir in (1) 0 für y und $x + 1$ für x ein, erhalten wir

$$f(x + f(x + 1) + 1) = x + f(x + 1) + 1. \tag{3}$$

Setzen wir andererseits $x = 1$ in (1), erhalten wir

$$f(1 + f(y + 1)) + f(y) = 1 + f(y + 1) + y \cdot f(1). \tag{4}$$

Durch Einsetzen von $x = -1$ in (2) erhalten wir $f(-1) = -1$. Anschließend ergibt $y = -1$ in (4) dann aber $f(1) = 1$. (4) wird also zu

$$f(1 + f(y + 1)) + f(y) = 1 + f(y + 1) + y. \tag{5}$$

Sind also y und $y + 1$ beide Fixpunkte von f, ist es $y + 2$ wegen

$$f(1 + y + 1) + y = 1 + y + 1 + y$$

auch. Aus (2) und (3) sehen wir also, dass $x + f(x + 1) + 2$ für alle $x \in \mathbf{R}$ ein Fixpunkt von f ist, und es gilt somit

$$f(x + f(x + 1) + 2) = x + f(x + 1) + 2.$$

Setzen wir aber andererseits in (1) $y = -1$, erhalten wir auch

$$f(x + f(x-1)) + f(-x) = x + f(x-1) - f(x),$$

und somit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbf{R}$, Die Funktion f ist also ungerade.
Setzen wir schließlich $(-1, -y)$ für (x, y) in (1) ein, erhalten wir wegen $f(-1) = -1$

$$\begin{aligned} f(-1 + f(-1-y)) + f(y) &= -1 + f(-1-y) - y \cdot f(-1) \\ &= -1 + f(-1-y) + y. \end{aligned}$$

Da f ungerade ist, gilt also

$$-f(1 + f(y+1)) + f(y) = -1 - f(1+y) + y,$$

und addieren wir dies zu (5), also $f(1 + f(y+1)) + f(y) = 1 + f(1+y) + y$, erhalten wir in diesem Fall $2f(y) = 2y$, also $f(y) = y$ für alle $y \in \mathbf{R}$. $\square$

Aufgabe 6: Die Folge $a_1, a_2, \ldots$ ganzer Zahlen genügt den folgenden Bedingungen:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ für alle $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ für alle $1 \leqslant k < \ell$.

Man beweise, dass es zwei positive ganze Zahlen b und N derart gibt, dass

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqslant 1007^2$$

für alle ganzen Zahlen m und n mit $n > m \geqslant N$ erfüllt ist.

Lösung: Zunächst stellen wir uns die positiven ganzen Zahlen auf der Zahlengeraden dargestellt vor. Für jedes n zeichnen wir de Pfeil von n zu $n + a_n$. Die Länge des Pfeils ist also in jedem Fall a_n. Aufgrund der Bedingung $m + a_m \neq n + a_n$ für $m \neq n$ ist jede ganze Zahl an der Spitze höchstens eines Pfeils. Es gibt sicher auch positive ganze Zahlen, wie z.B. 1, in denen keine Pfeilspitze liegt. Derartige Zahlen bezeichnen wir als *Anfangswerte*. Ausgehend von jedem Anfangswert bilden die Pfeile jeweils eine *Pfeilkette*, die aus Pfeilen besteht, deren Spitzen in Punkten einer streng monoton wachsenden Folge liegen. Da die Länge jedes Pfeils höchstens 2015 beträgt, hat jede Pfeilkette, ausgehend von einem Anfangswert s, eine Spitze in jedem Interval der Form $[n, n + 2014]$ mit $n \geq s$.

Wir erkennen jetzt, dass es höchstens 2015 Anfangswerte gibt. Gäbe es mindestens 2016, so könnten wir eine Zahl n wählen, die größer als die ersten 2016 Anfangswerte ist, und das Interval $[n, n + 2014]$ betrachten. In diesem müssten 2016 Pfeilketten Spitzen in lauter verschiedenen Punkten haben, was ein Widerspruch wäre. Bezeichnen wir die Anzahl der Anfangswerte mit b, gilt somit sicher $1 \leq b \leq 2015$. Wählen wir nun N beliebig größer als den größten Anfangswert, können wir nun zeigen, dass diese Werte von b und N die geforderte Eigenschaft haben.

Zu diesem Zweck wählen wir m und n mit $n > m \geq N$. Die Summe $\sum_{i=m+1}^{n} a_i$ gibt die Gesamtlänge aller Pfeile ausgehend von den Punkten $m + 1, \ldots, n$ an. Zusammen bilden diese Pfeile b Teilketten der vorgegebenen Pfeilketten, von denen manche unter Umständen keinen Pfeil enthalten, also leer sind. Nun bezeichnen wir in jeder Kette die erste Zahl größer als m_i, von der ein Pfeil ausgeht, mit x_i und entsprechend die erste Zahl größer als n, von der ein Pfeil ausgeht, mit y_i. Die Differenzen $y_1 - x_1, \ldots, y_b - x_b$ sind dann genau die Längen der Pfeilkettenteile, die zu diesem Bereich gehören (von denen einige auch die Länge 0 haben können). Es gilt also

$$\sum_{i=m+1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{b} (y_j - x_j).$$

Nun gilt aber

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m+1}^{n} (a_i - b) &= \sum_{i=m+1}^{n} a_i - b(n-m) \\
&= \sum_{j=1}^{b} (y_j - x_j) - (n-m)b \\
&= \sum_{j=1}^{b} (y_j - n) - \sum_{j=1}^{b} (x_j - m).
\end{aligned}$$

Jede Pfeilkette hat einen Endpunkt im Interval $[m+1, m+2015]$, und somit sind die Zahlen $x_1 - m, \ldots, x_b - m$ b verschiedene Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 2015\}$. Da $m+1$ kein Anfangswert ist, aber zu einer Pfeilkette gehören muss, muss sich 1 unter diesen Zahlen befinden, und somit gilt

$$1 + \sum_{j=1}^{b-1} (j+1) \leq \sum_{j=1}^{b} (x_j - m) \leq 1 + \sum_{j=1}^{b-1} (2016 - b + j).$$

Da dies auch für n und $y_1, \ldots, y_b$ analog gilt, gilt auch

$$1 + \sum_{j=1}^{b-1} (j+1) \leq \sum_{j=1}^{b} (y_j - n) \leq 1 + \sum_{j=1}^{b-1} (2016 - b + j),$$

und somit zusammenfassend

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=m+1}^{n} (a_i - b) \right| &\leq \sum_{j=1}^{b-1} ((2016 - b + j) - (j+1)) = (b-1)(2015-b) \\
&\leq \left(\frac{(b-1) + (2015-b)}{2} \right)^2 = 1007^2,
\end{aligned}$$

wie behauptet. $\square$