IMO 2014

Aufgabe 1. *Es sei $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ eine unendliche Folge positiver ganzer Zahlen.*

Man beweise, dass es genau eine ganze Zahl $n \geq 1$ gibt, für die

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}$$

gilt.

Lösung. Wir definieren

$$d_n = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) - n \cdot a_n$$

für $n = 1, 2, \ldots$. Offensichtlich ist die linke Ungleichung gleichwertig mit $d_n > 0$. Nun gilt aber auch

$$na_{n+1} - (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) = (n+1)a_{n+1} - (a_0 + a_1 + \ldots + a_{n+1}) = -d_{n+1}$$

und wir sehen, dass die rechte Ungleichung gleichwertig ist mit $d_{n+1} \leq 0$. Die Behauptung ist also danit gleichwtig, dass es einen eindeutigen Index $n \geq 1$ gibt, für den $d_n > 0 \geq d_{n+1}$ gilt.

Die Folge $d_1, d_2, \ldots$ besteht der Definition nach aus lauter ganzen Zahlen. Einerseits gilt nun

$$d_1 = (a_0 + a_1) - 1 \cdot a_1 = a_0,$$

und andererseits auch

$$d_{n+1} - d_n = ((a_0 + \ldots + a_n + a_{n+1}) - (n+1)a_{n+1}((a_0 + \ldots + a_n) - na_n) = n(a_n - a_{n+1}) < 0,$$

und somit $d_{n+1} < d_n$ für $n = 1, 2, \ldots$.

Die Folge der d_i ist also eine streng monoton fallende folge ganzer Zahlen mit $d_1 > 0$ und $d_1 > d_2 > \ldots$, und es gibt somit sicher einen eindeutigen index n, für den $d_n > 0 \geq d_{n+1}$ wie gefordert gilt. □

Aufgabe 2. *Es sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Gegeben sei ein $n \times n$ Schachbrett bestehend aus n^2 Einheitsquadraten. Eine Konfiguration von n Türmen auf diesem Brett heiße* friedlich, *falls jede Zeile und jede Spalte genau einen Turm enthält.*

Man bestimme die größte positive ganze Zahl k, sodass man für jede friedliche Konfiguration von n Türmen ein $k \times k$ Quadrat ohne einen Turm auf einem seiner k^2 Einheitsquadrate finden kann.

Lösung. Sei $(\ell - 1)^2 < n \leq \ell^2$ für eine passende ganze Zahl $\ell \geq 2$.

1. Wir zeigen zunächst, dass jede friedliche Konfiguration ein *freies* $(\ell - 1) \times (\ell - 1)$ Quadrat, d.h. ein $(\ell - 1) \times (\ell - 1)$ Quadrat ohne Turm enthält.

   Wir nehmen indirekt an, dass es eine friedliche Konfiguration ohne freies $(\ell - 1) \times (\ell - 1)$ Quadrat gibt.

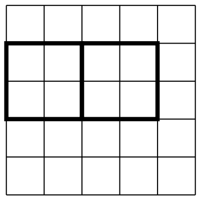

Abbildung 1: Aufgabe 2: Auffinden eines freien Quadrats.

Wir betrachten $(\ell-1)$ aufeinanderfolgende Zeilen. Wir unterteilen die ersten $(\ell-1)^2$ Spalten dieser $(\ell-1)$ Zeilen in $(\ell-1)$ nebeneinanderliegende $(\ell-1)\times(\ell-1)$ Quadrate, vgl. Abbildung 1. Nach Voraussetzung ist keines dieser Quadrate frei, also haben wir in diesen $(\ell-1)$ nebeneinanderliegenden $(\ell-1)\times(\ell-1)$-Quadraten $(\ell-1)$ Türme gefunden. Da jede Zeile genau einen Turm enthält, haben wir damit alle Türme dieser $(\ell-1)$ aufeinanderfolgenden Zeilen gefunden, sie alle liegen in den ersten $(\ell-1)^2$ Spalten. Insbesondere befindet sich in der letzten Spalte dieser $(\ell-1)$ Zeilen wegen $n > (\ell-1)^2$ kein Turm.

Wiederholt man das Argument für alle Blöcke von $(\ell-1)$ aufeinanderfolgenden Zeilen, so sieht man, dass es in der letzten Spalte überhaupt keinen Turm gibt, Widerspruch.

2. Wir betrachten nun den Spezialfall $n = \ell^2$ und konstruieren eine friedliche Konfiguration, die kein offenes $\ell \times \ell$ Quadrat enthält.

   Für $\ell = 3$ ist die Konstruktion aus Abbildung 2 ersichtlich.

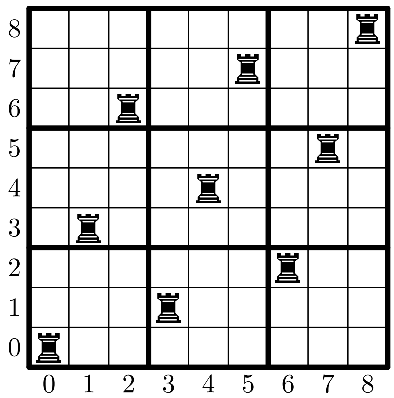

Abbildung 2: Aufgabe 2: Konstruktion einer blockierenden Konfiguration.

   Wir zerlegen das $\ell^2 \times \ell^2$-Quadrat also in $\ell \times \ell$-Quadrate. In der $i\ell + j$-ten Zeile (mit $0 \le i, j < \ell$), also der j-ten Zeile des i-ten Blocks, setzen wir den Turm in den j-ten Block in die i-te Spalte des Blocks, also an Position $j\ell + i$. Die Positionen der Türme sind also

$$(i\ell + j, j\ell + i), \qquad 0 \le i < \ell, 0 \le j < \ell.$$

Wir zeigen nun, dass diese Konfiguration keine freies $\ell \times \ell$-Quadrat enthält. Dazu betrachten wir die ℓ aufeinanderfolgenden Zeilen

$$a\ell + b, a\ell + (b+1), \dots, a\ell + \ell - 1, (a+1)\ell, \dots, (a+1)\ell + (b-1)$$

für gewisse $0 \leq a < \ell$, $0 \leq b < \ell$, $(a+1)\ell + b - 1 < \ell^2$. Die letzte Bedingung impliziert für $a = \ell - 1$, dass $b = 0$.

In diesen Zeilen befinden sich die Türme nach Definition in den Spalten

$$b\ell + a, (b+1)\ell + a, \dots, (\ell-1)\ell + a, (a+1), \dots, (b-1)\ell + (a+1).$$

Wir sortieren diese Spalten und erhalten

$$(a+1), \dots, (b-1)\ell + (a+1), b\ell + a, (b+1)\ell + a, \dots, (\ell-1)\ell + a.$$

Aufeinanderfolgende solche Spalten haben den Abstand ℓ oder $\ell - 1$. Die erste Spalte ist $< \ell$, weil für $a = \ell - 1$ und damit $b = 0$ die Liste der Spalten mit $a < \ell$ beginnt.

Daher gibt es kein freies $\ell \times \ell$-Quadrat in der angegebenen Konfiguration.

3. Schließlich betrachten wir den allgemeinen Fall $(\ell-1)^2 < n \leq \ell^2$ und zeigen, dass es eine friedliche Konfiguration ohne freies $\ell \times \ell$ Quadrat gibt.

   Dazu betrachten wir das linke untere $n \times n$ Teilquadrat der obigen Konstruktion für $\ell^2 \times \ell^2$. Es enthält kein freies $\ell \times \ell$-Quadrat, da jedes freie $\ell \times \ell$-Quadrat auch ein freies $\ell \times \ell$-Quadrat im großen $\ell^2 \times \ell^2$-Quadrat wäre. Allerdings sind im $n \times n$ Teilquadrat nun möglicherweise nicht alle Zeilen und Spalten mit Türmen versehen, lediglich mit jeweils höchstens einem Turm. Wir können nun in die Zeilen und Spalten ohne Türme jeweils noch Türme setzen, wodurch keine neuen freien $\ell \times \ell$-Quadrate geschaffen werden.

4. Wir haben damit gezeigt, dass für $(\ell-1)^2 < n \leq \ell^2$ das größte k mit der Eigenschaft, dass in jeder friedlichen Konfiguration ein freies $k \times k$-Quadrat auftritt, $k = \ell - 1$ ist. Wir erhalten

   $$\ell - 1 < \sqrt{n} \leq \ell,$$

   also $\ell = \lceil \sqrt{n} \rceil$ und damit als Antwort $k = \lceil \sqrt{n} \rceil - 1$.

$\square$

Aufgabe 3. *Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Der Punkt H sei der Lotfußpunkt von A auf BD. Die Punkte S und T befinden sich so auf den Seiten AB bzw. AD, dass H im Inneren des Dreiecks SCT liegt und*

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°$$

gilt.

Man beweise, dass die Gerade BD eine Tangente an den Umkreis des Dreiecks TSH ist.

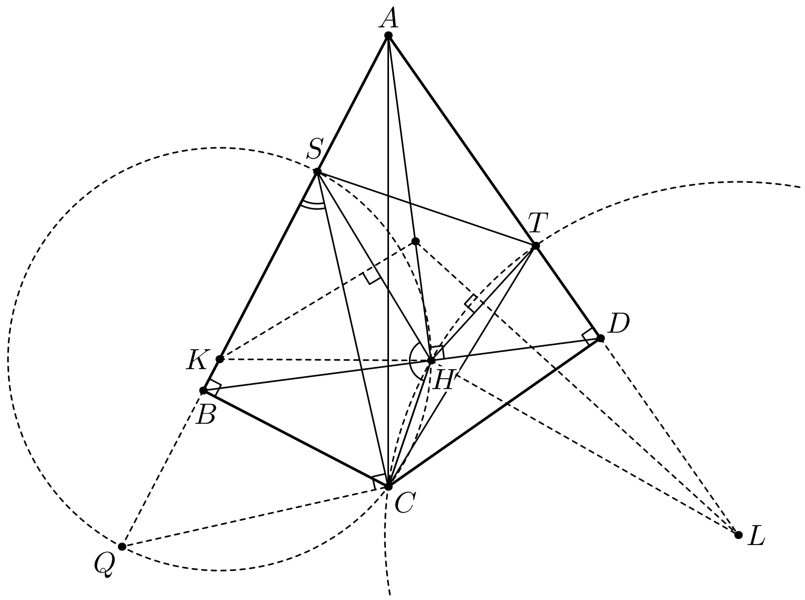

Abbildung 3: Aufgabe 3

Lösung. Wir definieren zunächst den Punkt Q als Schnittpunkt von der Geraden AB mit der Normalen zu SC durch C. Wegen

$$\angle SQC = 90^\circ - \angle BSC = 90^\circ - (\angle SHC - 90^\circ) = 180^\circ - \angle SHC$$

ist $SHCQ$ somit ein Sehnenviereck mit Durchmesser SQ. Der Mittelpunkt K seines Umkreises liegt also auf der Geraden AB. Analog liegt dann auch der Umkreismittelpunkt L von $\triangle CHT$ auf AD.

Um nun nachzuweisen, dass der Umkreis von $\triangle SHT$ von BD berührt wird, können wir zeigen, dass sich die Streckensymmetralen von HS und HT auf AH schneiden. Da diese geraden aber auch die Winkelsymmetralen von $\angle AKH$ bzw. $\angle ALH$ sind, können wir auch nachweisen, dass

$$\frac{AK}{AH} = \frac{AL}{LH}$$

gilt.

Zu diesem Zweck bezeichnen wir den Schnittpunkt von KL und HC als M. Wegen $KH = KC$ und $LH = LC$ ist KL die Streckensymmetrale von CH und somit M der Mittelpunkt von CH. Sei O der Umkreismittelpunkt von $ABCD$. Da O der Mittelpunkt von AC ist, gilt $OM \| AH$, und somit $OM \perp BD$. Da $OB = OD$ gilt, ist OM die Strekensymmetrale von BD, und es gilt somit $MB = MD$.

Wegen $CM \perp KL$, liegen B, C, M und K auf dem Kreis mit Durchmesser KC, und analog auch L, C, M und D auf dem Kreis mit Durchmesser LC. Somit gilt unt Verwendung des Sinussatzes

$$\frac{AK}{AL} = \frac{\sin \angle ALK}{\sin \angle AKL} = \frac{DM}{CL} \cdot \frac{CK}{BM} = \frac{CK}{CL} = \frac{KH}{LH},$$

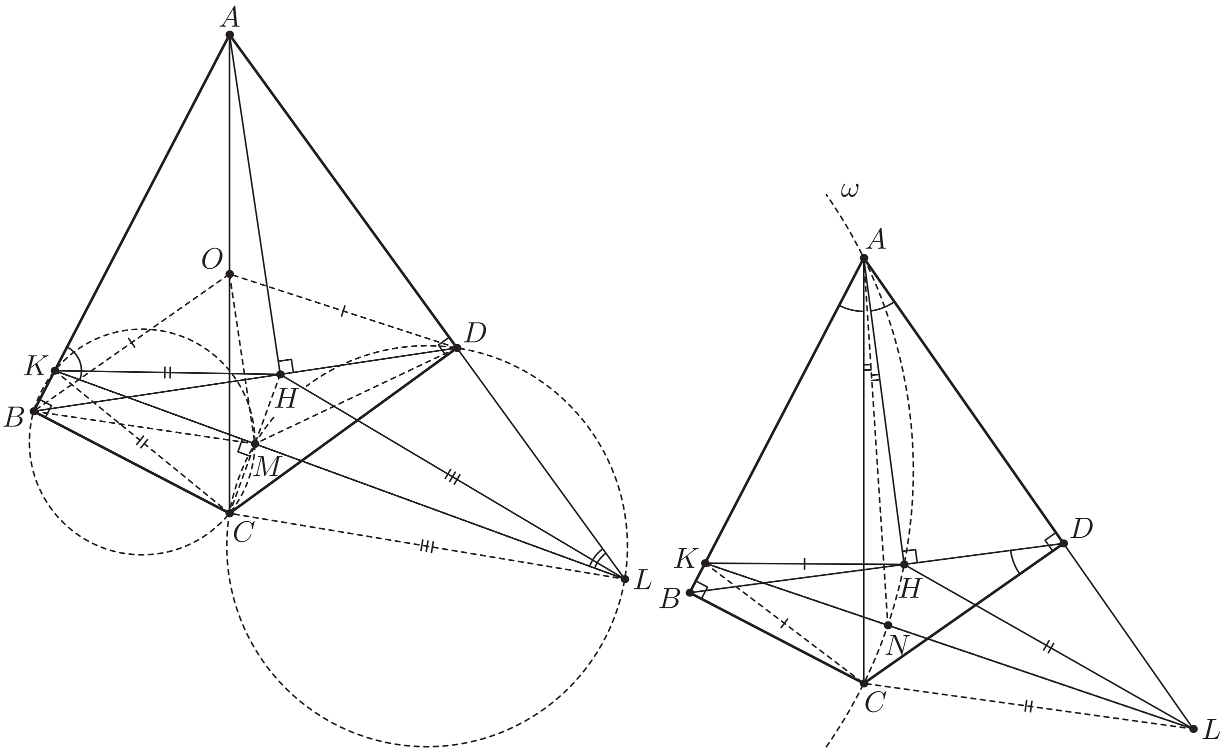

Abbildung 4: Aufgabe 3

und der Beweis ist erbracht. □

Aufgabe 4. *Die Punkte P und Q liegen so auf der Seite BC eines spitzwinkligen Dreiecks ABC, dass $\angle PAB = \angle BCA$ und $\angle CAQ = \angle ABC$ gilt. Die Punkte M und N auf den Geraden AP bzw. AQ seien so gewählt, dass P der Mittelpunkt von AM ist und Q der Mittelpunkt von AN ist.*

Man beweise, dass sich die Geraden BM und CN auf dem Umkreis des Dreiecks ABC schneiden.

Lösung. Es seien $S = BM \cap CN$, $\beta = \angle QAC = \angle CBA$ und $\gamma = \angle PAB = \angle ACB$. Die Dreiecke $\triangle PAB$ und $\triangle CAQ$ sind ähnlich und es gilt $\angle BPM = \angle CQN = \beta + \gamma$.

Wegen $BP : PM = BP : PA = AQ : QC = NQ : QC$ sind auch die Dreiecke $\triangle BPM$ und $\triangle NQC$ ähnlich, und es gilt

$$\angle CSB = \angle BPM = \beta + \gamma = 180^\circ - \angle BAC,$$

womit gezeigt ist, dass S auf dem Umkreis von $\triangle ABC$ liegt. □

Aufgabe 5. *Für jede positive ganze Zahl n gibt die Bank von Kapstadt Münzen mit dem Wert $\frac{1}{n}$ heraus. Eine gewisse endliche Anzahl von Münzen (mit nicht notwendigerweise verschiedenen Werten) habe einen Gesamtwert von höchstens $99 + \frac{1}{2}$.*

Man beweise, dass man diese Münzen in höchstens 100 Gruppen aufteilen kann, jede mit einem Gesamtwert von höchstens 1.

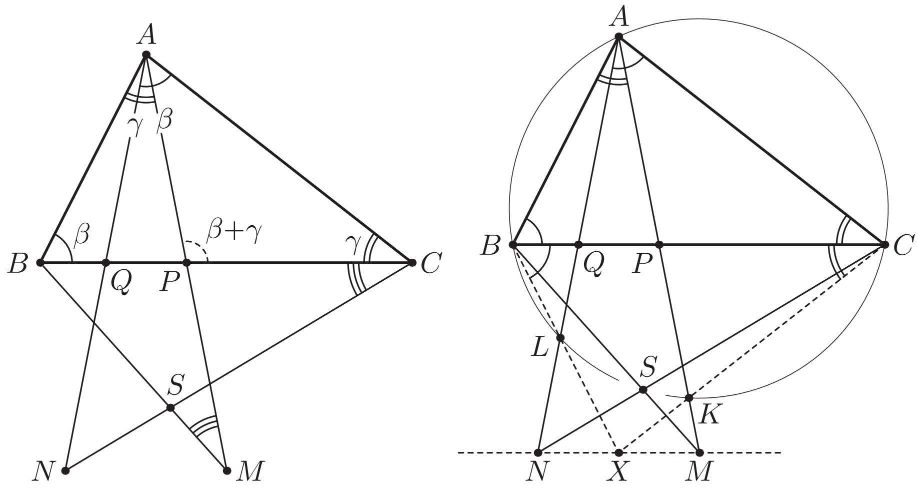

Abbildung 5: Aufgabe 4

Lösung. Wir betrachten allgemein eine Anzahl von Münzen mit einem Gesamtwert von höchstens $N - \frac{1}{2}$, und zeigen, dass man sie in N Gruppen von einem Gesamtwert vin je höchstens 1 gruppieren kann. Die Behauptung ist dann der spezielle Fall $N = 100$.

Wir stellen zunächst fest, dass mehrere Münzen zusammen mit einem Gesamtwert von $\frac{1}{k}$ durch eine einzige Münze ersetzt werden können. Wenn die Aufteilung in Gruppen für die resultierende Münzmenge gelingt, gelingt sie auch für die zunächst gegebene Münzmenge. Nach einigen derartigen Vereinfachungen ist ein solches Ersetzen nicht mehr möglich. Zu diesem Zeitpunkt gibt es zu jeden geraden k höchstens eine Münze mit dem Wert $\frac{1}{k}$ und zu jedem ungeraden k höchstens $(k-1)$ Münzen mit dem Wert $\frac{1}{k}$, da ansonsten doch im Widerspruch zur Annahme mehre Münzen durch eine einzige ersetzt werden könnten (im Wert von $\frac{1}{k/2}$ bzw. 1).

Unter diesen Münzen können sich einige mit dem Wert 1 befinden, die jeweils eine eigene Gruppe bilden. Wenn es d derartige Münzen gibt, ersetzen wir einfach N durch $N - d$. Im Folgenden können wir also annehmen, dass es keine Münze mit dem Wert 1 gibt.

Nun fassen wir für $k = 1, 2, \ldots, N$ alle Münzen mit dem Wert $\frac{1}{2k-1}$ und $\frac{1}{2k}$ jeweils zu einer Gruppe G_k zusammen. Der Gesamtwert von G_k ist sicher nicht größer als

$$(2k_2) \cdot \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} = 1 - \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} < 1.$$

Nun verbleiben noch Münzen mit Werten kleiner als $\frac{1}{2N}$ übrig, die alle zu diesen Gruppen hinzugefügt werden müssen. In jedem Schritt wählt man eine dieser Münzen aus. Der Gesamtwert der Münzen in den N Gruppen ist kleiner als $N - \frac{1}{2}$, also gibt es in jeder Gruppe einen Gesamtwert von höchstens

$$\frac{1}{N} \cdot \left(N - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2N}.$$

Man kann also die gewählte Münze zu dieser (jeder) Gruppe dazugeben, ohne den Wert dies Gruppe über 1 zu erhöhen. Da dieser Prozess nach endlich vielen Schritten abbricht und jede der N Gruppen dann immer noch je einen Wert von höchstens 1 hat, haben wir die Münzen wie gefordert aufgeteilt. $\square$

Aufgabe 6. *Eine Menge von Geraden in der Ebene ist in* allgemeiner Lage*, falls keine zwei Geraden parallel sind und keine drei einen gemeinsamen Punkt haben. Eine Menge von Geraden in allgemeiner Lage teilt die Ebene in Bereiche auf. Diejenigen dieser Bereiche, die eine endliche Fläche besitzen, nennen wir* endliche Bereiche.

Man beweise für alle hinreichend große n, dass es für jede Menge von n Geraden in allgemeiner Lage möglich ist, mindestens $\sqrt{n}$ der Geraden blau zu färben, sodass keiner ihrer endlichen Bereiche komplett blau umrandet ist.

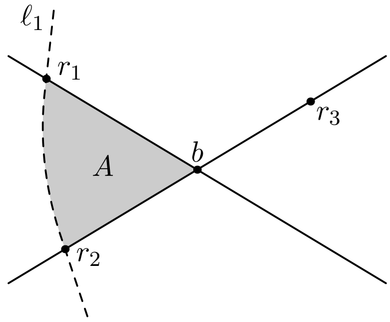

Abbildung 6: Aufgabe 6

Lösung. Es sei L die Menge der gegebenen Geraden. Wir wählen eine maximale Teilmenge $B \subseteq L$ mit der Eigenschaft, dass eine Blaufärbung aller Geraden von B kein Gebiet von $\mathcal{F}$ mit vollständig blauer Umramdung erzeugt. Sei $|B| = k$. Zu zeigen ist nun $k \geq \lceil \sqrt{n} \rceil$.

Wir nehmen an, dass alle Geraden, die nicht blau sind, rot seien. Jeden Schnittpunkt von zwei blauen Geraden bezeichnen wir ebenfalls als blau, und jeden Schnittpunkt einer roten mit einer blauen Geraden bezeichnen wir als rot.

Zu jeder roten Geraden gibt es ein Gebiet $A \in \mathcal{F}$ für das diese die einzige rote Begrenzungsgerade ist, da die Menge B ansonsten nicht maximal wäre. Wir betrachten zu einem solchen Gebiet A die Eckpunkte $r', r, b_1, \ldots, b_k$, die im Uhrzeigersinn genannt sind und von denen r' und r die roten Punkte seien, während $b_1, \ldots, b_k$ alle blauen sind. Nun ordnen wir die roten Geraden dem roten Punkt r und dem blauen Punkt b_1 zu. Zu jedem Paar (r, b) eines roten und eines blauen Punktes kann es höchstens ein zugeordnetes Gebiet geben, da r und b im Uhrzeigersinn höchetns in einem Gebiet aufeinanderfolgende Eckpunkte sein können.

Nun stellen wir aber auch fest, dass höchstens zwei rote Geraden jedem blauen Punkt zugeordnet sein können. Daraus wird dann folgen, dass, wie gefordert,

$$n - k \leq 2 \cdot \binom{k}{2} \iff n \leq k^2$$

gilt.

Nehmen wir zu diesem Zweck an, dass es drei rote Geraden ℓ_1, ℓ_2 und ℓ_3 gebe, die demmselben blauen Punkt b zugeordnet seien. Es seien r_1, r_2 und r_3 die zugehörigej zugeordneten roten Punkte, und diese seien paarweise verschieden. Der Punkt b ist Endpunkt von vier blauen Strahlen und jeder der Punkte r_1, r_2 und r_3 ist der Nächstgelegene zu b auf einem dieser Strahlen. Seien o.B.d.A. r_2 und r_3 auf einer gemeinsamen blauen Geraden durch b und r_1 auf der andern.

Nun sei A das Gebiet, das r_1 und b zugeordnet ist. Drei seiner Eckpunkte sind im Uhrzeigersinn r_1, b und (o.B.d.A.) r_2. Da A nur eine rote Seite hat, muss A das Dreieck r_1br_2 sein. Das bedeutet aber, dass sowohl ℓ_1 als auch ℓ_2 durch r_2 gehen, im Iderspruch zu den Voraussetzungen. Es gilt also tatsächlich

$$n - k \leq 2 \cdot \binom{k}{2},$$

und somit wie behauptet $k \geq \lceil \sqrt{n} \rceil$.

$\square$