IMO 2013

Aufgabe 1: Man beweise: Für jedes Paar positiver ganzer Zahlen k und n existieren positive ganze Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (nicht notwendigerweise verschieden), so dass

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m_k}\right)$$

gilt.

Lösung: Der Beweis gelingt mittels vollständiger Induktion nach k. Für $k = 1$ lautet die Behauptung

$$1+\frac{2^1-1}{n}=1+\frac{1}{m_1},$$

und dies gilt offensichtlich für $m_1 = n$.

Nun nehmen wir an, es gelte die Behauptung für $k = j-1$. Wir wollen zeigen, dass die Gültigkeit für $k = j$ dann folgt.

Fall 1: n ungerade

In diesem Fall gibt es eine positive ganze Zahl t mit $n = 2t - 1$, und es gilt

$$1+\frac{2^j-1}{2t-1}=\frac{2\cdot(t+2^{j-1}-1)}{2t}\cdot\frac{2t}{2t-1}=\left(1+\frac{2^{j-1}-1}{t}\right)\left(1+\frac{1}{2t-1}\right),$$

und nach der Induktionsannahme gibt es Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_{j-1}$ mit

$$1+\frac{2^{j-1}-1}{t}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m_{j-1}}\right).$$

Mit $m_j = 2t - 1$ folgt in diesem Falls also die Gültigkeit der Behauptung für $k = j$.

Fall 2: n gerade

In diesem Fall gibt es eine positive ganze Zahl t mit $n = 2t$ und es gilt

$$1+\frac{2^j-1}{2t}=\frac{2t+2^j-1}{2t+2^j-2}\cdot\frac{2t+2^j-2}{2t}=\left(1+\frac{1}{2t+2^j-2}\right)\left(1+\frac{2^{j-1}-1}{t}\right)$$

mit $2t + 2^j - 2 > 0$. Auch in diesem Fall gibt es nach der Induktionsannahme $m_1, m_2, \ldots m_{j-1}$ mit

$$1+\frac{2^{j-1}-1}{t}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m_{j-1}}\right),$$

und mit $m_j = 2t + 2^j - 2$ ist wieder die Gültigkeit der Behauptung für $k = j$ gezeigt, was den Beweis abschließt. $\square$

Aufgabe 2: Eine Konfiguration aus 4027 Punkten in der Ebene heißt *kolumbianisch*, wenn sie aus 2013 roten und 2014 blauen Punkten besteht, von denen keine drei Punkte auf einer Geraden liegen. Durch das Einzeichnen einiger Geraden wird die Ebene in mehrere Regionen unterteilt. Eine Menge von Geraden heißt *gut* für eine kolumbianische Konfiguration, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Keine Gerade geht durch einen Punkt der Konfiguration.
- Keine Region enthält Punkte beider Farben.

Man bestimme den minimalen Wert von k, so dass es für jede kolumianische Konfiguration von 4027 Punkten eine gute Menge von k Geraden gibt.

Lösung: Wir wollen zeigen, dass $k = 2013$ der gesuchte Wert ist. Zunächst gilt sicher $k \geq 2013$, was man z.B. anhand des folgenden Beispiels erkennt.

Seien 4026 Punkte gleichmäßig auf einem Kreis angeordnet und abwechselnd gefärbt. (Der fehlende blaue Punkt kann dazu beliebig angenommen werden.) Der Kreis ist somit in 4026 Bögen zerteilt, die je von einem blauen und einem roten Punkt begrenzt sind. Da diese durch eine Gerade getrennt werden müssen, muss der Kreis in jedem dieser 4026 Bogenstücke von einer der k Geraden geschnitten werden. Dazu sind aber 2013 Geraden notwendig, da keine Gerade mehr als zwei Punkte mit dem Kreis gemeinsam haben kann. Es gilt somit sicher $k \geq 2013$.

Es bleibt also zu zeigen, dass 2013 Geraden immer ausreichen. Zu diesem Zweck bemerken wir, dass zwei beliebige Punkte A und B stets von allen anderen durch zwei Geraden parallel zur Verbindungsgeraden $g = [AB]$ getrennt werden können, wenn die beiden Geraden ausreichend nahe an g gelegt werden.

Nun betrachten wir die Punkte auf der konvexen Hülle P der 4027-elementigen Punktmenge.

Fall 1: Auf der konvexen Hülle befindet sich ein roter Punkt A.

Da A auf der konvexen Hülle P liegt, kann er von allen übrigen durch eine Gerade getrennt werden. Nun können die restlichen 2012 roten Punkte beliebig zu 1006 Paaren zusammengefasst werden. Jedes Paar kann durch zwei parallele Geraden von allen übrigen getrennt werden, und wir haben somit durch $1 + 2 \cdot 1006 = 2013$ Geraden alle roten Punkte entweder einzeln oder paarweise vom Rest abgetrennt.

Fall 2: Auf P befinden sich nur blaue Punkte.

In diesem Fall trennen wir zuerst zwei benachbarte Punkte der konvexen Hülle P von allen anderen durch eine Gerade. Dann verbleibt die Situation von Fall 1 mit 2012 verbleibenden blauen Punkten, dies wieder paarweise mit $2 \cdot 1006$ Geraden von allen übrigen getrennt werden können. Auch in diesem Fall genügen also 2013 Geraden und wir haben somit $k \leq 2013$ und somit zusammengefasst $k = 2013$, wie behauptet. $\square$

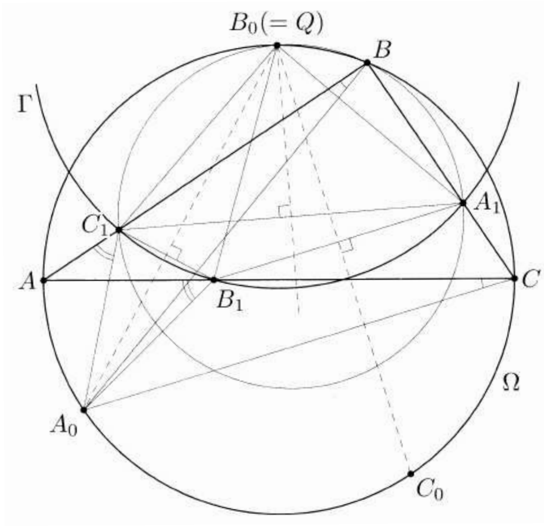
Aufgabe 3: Der A gegenüber liegende Ankreis des Dreiecks ABC berühre die Seite BC im Punkt A_1. Die Punkte B_1 auf der Seite CA und C_1 auf der Seite AB seien, unter Verwendung der B bzw. C gegenüber liegenden Ankreise, anlog definiert. Man nehme an, dass der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $A_1B_1C_1$ auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegt. Man beweise, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

(Der *Ankreis* von ABC, der dem Eckpunkt A gegenüber liegt, ist der Kreis, der die Strecke BC sowie den Strahl AB jenseits von B und den Strahl AC jenseits von C berührt. Die B bzw. C gegenüber liegenden Ankreise werden analog definiert.)

Lösung: Es seien Ω der Umkreis von ABC und Γ der Umkreis von $A_1B_1C_1$. A_o sei als Mittelpunkt desjenigen Bogens CB von Ω, der A enthält definiert, und analog B_o und C_o. Wir setzen also voraus, dass der Mittelpunkt Q von Γ and Ω liege.

Lemma: Es gilt $A_oB_1 = A_oC_1$. Ferner, bilden die Punkte A, A_o, B_1 und C_1 ein Sehnenviereck. Weiters liegen die Punkte A und A_o auif derselben Seite von B_1C_1. Analaoge Ergebnisse gelten für B und C.

Beweis des Lemmas: Betrachten wir zunächst den Fall $A = A_o$. In diesem Fall ist ABC gleichschenkelig mit Spitze in A, womit auitomatisch AB_1AC_1 folgt. Die übrigen Behauptungen des Lemmas sind in diesem Fall trivialerweise erfüllt. Wir können also im Weiteren $A \neq A_o$ voraussetzen.



Nach der Definition von A_o gilt sicher $A_oB = A_oC$. Es ist bekannt (und kann leicht mit Hilfe der Tangentialstrecken von A an den Inkreis von ABC gezeigt werden), dass $BC_1 = CB_1$ gilt. Nun gilt $\angle C_1BA_o = \angle ABA_o = \angle ACA_o = \angle B_1CA_o$, und die Dreiecke A_oBC_1 und A_oCB_1 sind somit kongruent, woraus unmittelbar die erste Behauptung $A_oC_1 = A_oB_1$ folgt. Es folgt aber auch $\angle A_oC_1A = \angle A : oB_1A$, da dies entsprechende Außenwinkel der kongruenten Dreiecke sind. Somit ist $AA_oB_1C_1$ wie behauptet ein Sehnenviereck, bei dem A und A_o auf derselben Seite von B_1C_1 liegen, was den Beweis des Lemmas abschließt. □

Nun kommen wir zum Beweis der eigentlichen Behauptung. Offensichtlich liegen die Punkte A_1, B_1 und C_1 auf einem gemeinsamen Halbkreis von Γ (da Q außerhalb von ABC liegt), und das Dreieck $A_1B_1C_1$ ist somit stumpfwinkelig. O.B.d.A sei der Winkel in B_1 stumpf. Dann liegen A und B_1 auf gegenüberliegenden Seiten von A_1C_1, und dasselbe gilt natürlich auch für B und B_1. Q und B liegen somit auf derselben Seite von A_1C_1.

Nun stellen wir fest, dass die Streckensymmetrale von A_1C_1 den Kreis Ω in zwei Punkten schneidet, die auf verschiedenen Seiten von A_1C_1 liegen. Nach dem Lemma gehören B_o und Q beide zu diesen Punkten, und da sie auf derselben Seite von A_1C_1 liegen, müssen sie somit zusammenfallen.

Nach dem Lemma sind QA_o und QC_o die Streckensymmetralen von B_1C_1 bzw. A_1B_1. Somit gilt

$$\angle C_1B_oA_1 = \angle C_1B_oB_1 + \angle B_1B_oA_1 = 2\angle A_oB_oB_i + 2\angle B_1B_oC_o = 2\angle A_oB_oC_o = 180^o - \angle ABC,$$

da A_o und C_o die Mittelpunkte der Bögen CB bzw. BA sind.

Andererseits gilt aber aufgrund des Lemmas

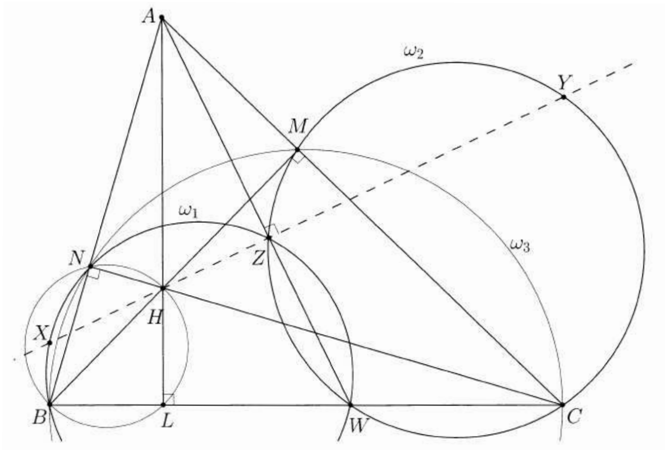
$$\angle C_1B_oA_1 = \angle C_1BA_1 = \angle ABC,$$

und mit diesen beiden Beziehungen folgt $\angle ABC = 90^o$, wie behauptet. □

Aufgabe 4: Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit dem Höhenschnittpunkt H. Ferner sei W ein innerer Punkt der Strecke BC. Es bezeichnen M und N die Höhenfußpunkte von B bzw. C. Außerdem bezeichne ω_1 den Umkreis von BWN und X den Punkt auf ω_1, so dass WX ein Durchmesser von ω_1 ist. Analog bezeichne ω_2 den Umkreis von CWM und Y den Punkt auf ω_2, so dass WY ein Durchmesser von ω_2 ist.

Man beweise, dass die Punkte X, Y und H auf einer Geraden liegen.

Lösung: Seien L der Höhenfußpunkt aus A und Z der zweite Schnittpunkt von ω_1 und ω_2 neben W. Wir zeigen, dass X, Y, Z und H alle auf einer gemeinsamen Gerade liegen.



Wegen $\angle BNC = \angle BMC = 90^o$ liegen die Punkte B, C, N und M auf einem gemeinsamen Kreis, den wir als ω_3 bezeichnen. WZ ist die Potenzgerade von ω_1 und ω_2, BN die von ω_1 und ω_3 und CM die von ω_2 und ω_3. Es folgt also, dass $A = BN \cap CM$ das Potenzzentrum der drei Kreise ist, und die Gerade WZ geht somit durch diesen Punkt A.

Da WX und WY Durchmesser von ω_1 bzw. ω_2 sind, gilt $\angle WZX = \angle WZY = 90^o$, und X und Y liegen somit auf der Normalen zu WZ durch Z.

Nun ist $BLHN$ sicher ein Sehnenviereck, da es zwei rechte Winkel hat. Wegen der Potenz von A bezüglich ω_1 und dem Umkreis von $BLHN$ gilt $AL \cdot AH = AB \cdot AN = AW \cdot AZ$. Liegt nun H auf AW, so folgt unmittelbar $H = Z$. Andernfalls folgt aber aus der Beziehung $\frac{AZ}{AH} = \frac{AL}{AW}$, dass die Dreiecke AHZ und ALW ähnlich sind. Es folgt somit $\angle HZA = \angle WLA = 90^o$, und der Punkt H liegt somit ebenfalls auf der Geraden XY, wie behauptet. $\square$

Aufgabe 5: Es sei $\mathbf{Q}_{>0}$ die Menge der positiven rationalen Zahlen. Ferner sei $f : \mathbf{Q}_{>0} \to \mathbf{R}$ eine Funktion, welche die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

(i) Für alle $x, y \in \mathbf{Q}_{>0}$ gilt $f(x)f(y) \geq f(xy)$.

(ii) Für alle $x, y \in \mathbf{Q}_{>0}$ gilt $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$.

(iii) Es gibt eine rationale Zahl $a > 1$, für die $f(a) = a$ gilt.

Man beweise, dass $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbf{Q}_{>0}$ gilt.

Lösung: Es bezeichne $\mathbf{Z}_{>0}$ die Menge der positiven ganzen Zahlen.

Setzen wir zunächst $x = y = 1$ in (i) ein, erhalten wir $f(1) \geq 1$. Durch einfache Induktion nach n folgt aus (ii)

$$f(nx) \geq nf(x) \quad \forall\, n \in \mathbf{Z}_{>0} \text{ und } x \in \mathbf{Q}_{>0}.$$

Speziell folgt also

$$f(n) \geq nf(1) \geq n \forall\, n \in \mathbf{Z}_{>0}.$$

Aus (i) folgt aber $f(\frac{m}{n})f(n) \geq f(m)$, und somit gilt $f(q) > 0$ für alle $q \in \mathbf{Q}_{>0}$.

Nun folgt aus (ii), dass f streng monton steigend sein muss, und es gilt somit

$$f(x) \geq f(\lfloor x \rfloor) \geq \lfloor x \rfloor > x - 1 \quad \forall\, x \geq 1.$$

Mit Hilfe einer einfachen Induktion folgt aus (i) sofort $f(x)^n \geq f(x^n)$, und somit

$$f(x)^n \geq f(x^n) > x^n - 1 \iff f(x) \geq \sqrt[n]{x^n - 1} \quad \forall x > 1 \text{ und } n \in \mathbf{Z}_{>0}.$$

Somit gilt aber sicher

$$f(x) \geq x \quad \forall\, x > 1.$$

(Wählen wir $x > y > 1$ folgt aus $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1}) > n(x-y)$ mit großem n sogar $x^n - 1 > y^n$ und somit $f(x) > y$.)

Nun gilt aber zusammenfassend $a^n = f(a)^n \geq g(a^n) \geq a^n$, und somit $f(a^n) = a^n$. Somit können wir für jedes $x > 1$ ein $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ wählen, sodass $a^n - x > 1$ gilt. Dann folgt aber

$$a^n = f(a^n) \geq f(x) + f(a^n - x) \geq x + (a^n - x) = a^n,$$

und somit $f(x) = x$ für $x > 1$. Schließlich gilt für jedes $x \in \mathbf{Q}_{>0}$ und für jedes $n \in \mathbf{Z}_{>0}$

$$nf(x) = f(n)f(x) \geq f(nx) \geq nf(x),$$

woraus $f(nx) = nf(x)$ folgt. Es gilt somit $f(\frac{m}{n}) = \frac{f(m)}{n} = \frac{m}{n}$ für alle $m, n \in \mathbf{Z}_{>0}$. $\square$

Aufgabe 6: Es sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Man betrachte einen Kreis, auf dem $n+1$ Punkte in jeweils gleichem Abstand markiert sind. Man betrachte alle Beschriftungen dieser Punkte mit den Zahlen $0, 1, \ldots, n$, wobei jede Zahl genau einmal vorkommt. Zwei solche Beschriftungen werden als gleich angesehen, wenn man die eine durch Drehung des Kreises aus der anderen erhalten kann. Eine Beschriftung heißt *schön*, wenn für je vier Zahlen $a < b < c < d$ mit $a + d = b + c$ die Sehne zwischen a und d nicht die Sehne zwischen b und c schneidet.

Es bezeichne M die Anzahl der schönen Beschriftungen und N die Anzahl der geordneten Paare (x, y) von positiven ganzen Zahlen mit $x + y \leq n$ und $\mathrm{ggT}(x, y) = 1$. Man beweise

$$M = N + 1.$$

Lösung: Ist eine Beschriftung von $[0, n] = \{0, 1, \ldots, n\}$ gegeben, bezeichnen wir eine (möglicherweise degenerierte) Sehne, deren (möglicherweise gleichen) Endpunkte die Summe k haben als *k-Sehne.* Wir bezeichnen drei Sehnen des Kreises als *geordnet*, wenn eine darunter die anderen zwei trennt. $m \geq 3$ Sehnen werden als geordnet bezeichnet, wenn es darunter drei geordnete gibt. In der Abbildung 1 sind also etwa die Sehnen A, B und C geordnet, während es B, C und D nicht sind.

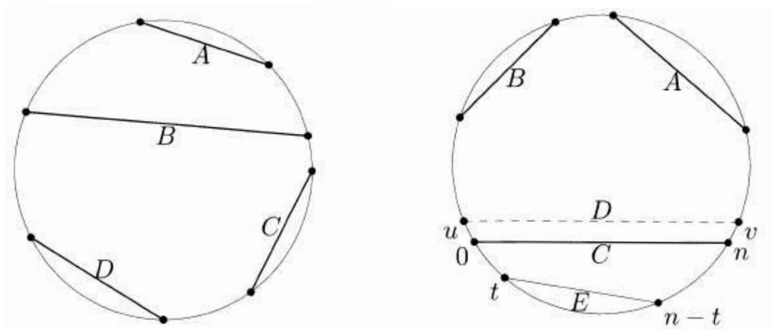


Figure 1 Figure 2

Behauptung: In einer schönen Beschriftung sind die k-Sehnen für jeden ganzzahligen Wert von k geordnet.

Beweis: Der Beweis gelingt mittels Induktion nach n. Für $n \leq 3$ ist die Aussage trivial. Nun sei $n \geq 4$. Wir betrachten eine schöne Beschriftung S in der die k-Sehnen A, B und C nicht geordnet seien. Wir wollen zeigen, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt. Ist n nicht unter den Endpunkten von A, B oder C, so erhalten wir durch Entfernung von n aus S eine schöne Beschriftung $S \backslash \{n\}$ von $[0, n-1]$, in der A, B und C laut Induktionsannahme geordnet sein müssen. Ist 0 nicht unter den Endpunkten von A, B oder C, erhalten wir durch Entfernung von 0 und Reduktion aller Zahlen um 1 eine schöne Beschriftung $S\backslash\{0\}$, in der wiederum A, B und C geordnet sein müssen. Wir erkennen also, dass sich sowohl 0 als auch n unter den Endpunkten der drei Sehnen befinden müssen. Sind x bzw. y ihre jeweiligen Partner, erhalten wir $n \geq 0 + x = k = n + y \geq n$. 0 und n müssen also die beiden Endpunkte einer Sehnen sein. Sei diese o.B.d.A. C.

Nun sei D die Sehne, die die Zahlen u und v verbindet, die $=$ und n benachbart sind und, wie in Figur 2 abgebildet, auf derselben Seite von C wie A und B liegen. Wir setzen $t = u + v$. Würde $t = n$ gelten, wären die n-Sehnen A, B und D in der schönen Beschriftung $S\backslash\{0, n\}$ nicht geordnet, im Widerspruch zur Induktionsannahme. Gilt $t < n$, so kann die t-Sehne von 0 zu t D nicht schneiden, womit also die Sehne C t und D trennt. Die Sehne E von t zu $n - t$ schneidet C nicht, und t und $n - t$ liegen somit auf derselben Seite von C. Dann sind aber die Sehnen A, B und E nicht in $S\backslash\{0, n\}$ geordnet, was ein Widerspruch ist. Gilt schließlich $t > n$, erkennen wir, dass dieser Fall zum Fall $t < n$ gleichwertig ist, indem wir die schönheitserhaltende Umnummerierung $x \mapsto n - x$ für $0 \leq x \leq n$ durchführen, die t-Sehnen auif $(2n - t)$-Sehnen abbildet. Die Gültigkeit des Lemmas ist also gezeigt.

Da nun das Lemma zur Verfügung steht, können wir die Gültigkeit der Behauptung ebenfalls mittels Induktion nach n zeigen. Der Fall $n = 2$ ist klar, und wir können somit $n \geq 3$ voraussetzen. Es sei S eine schöne Beschriftung von $[0, n]$. Entfernt man den Punkt n, erhält man eine schöne Beschriftung T von $[0, n - 1]$. Die n-Sehnen von T sind geordnet und sie enthalten jeden Punkt außer 0. Wir sagen T sei vom *Typ I*, wenn 0 zwischen zwei dieser n-Sehnen liegt. Ist dies nicht der Fall (d.h. 0 liegt mit diesem n-Sehnen geordnet), sagen wir T sei vom *Typ II*. Wir zeigen nun, dass jede Typ I Beschriftung aus einer eindeutigen Beschriftung von $[0, n]$ entsteht, und jede Typ II Beschriftung aus genau zwei schönen Beschriftungen von $[0, n]$.

Sei zunächst T vom Typ I. 0 liege zwischen den Sehnen A und B. Da die Sehne von 0 zu n mit A und B in S geordnet liegen muss, muss n auf dem gegenüber liegenden Bogen zwischen A und B liegen. Es kann also S eindeutig aus T rekonstruiert werden. Ist umgekehrt T von Typ I und wir setzen n wie beschrieben, behaupten wir, dass die resultierende Beschriftung S schön ist. Für $0 < k < n$ sind die k-Sehnen von S auch k-Sehnen von T, und somit geordnet. Für $n < k < 2n$ schließlich sind die n-Sehnen aufgrund der Konstruktion parallel, und es existiert somit eine Achseℓ, sodass x symmetrische zu $n - x$ bezüglich ℓ liegt für alle x. Würden sich zwei k-Sehnen schneiden, so wären ihre Spiegelbilder an ℓ zwei schneidende k-Sehnen, im Widerspruch zu $0 < 2n - k < n$.

Nun sei T vom Typ II. In diesem Fall gibt es zwei mögliche Lagen von n in S, auf beiden Seiten von 0. Wie zuvor können wir erkennen, dass beide zu schönen Beschriftungen von $[0, n]$ führen.

Bezeichnen wir also die Anzahl schöner Beschriftungen von $[0, n]$ mit M_n und die Anzahl schöner Beschriftungen von $[0, n - 1]$ vom Typ II, so erhalten wir

$$M_n = (M_{n-1} - L_{n-1}) + 2L_{n-1} = M_{n-1} + L_{n-1}.$$

Es bleibt also noch zu zeigen, dass L_{n-1} gleich der Anzahl von Paaren (x, y) positiver ganzer Zahlen mit $x + y = n$ und $\operatorname{ggT}(x, y) = 1$ ist. Wegen $n \geq 3$ ist diese Zahl gleich

$$\varphi(n) = |\{x|\ 1 \leq x \leq n,\ \operatorname{ggT}(x, n) = 1\}|.$$

Um dies zu zeigen betrachten wir eine schöne Beschriftung von $[0, n - 1]$ vom Typ II. Wir beschriften die Punkte im Uhrzeigersinn der Reihe nach mit $0, \ldots, n - 1 \pmod n$ so, dass die Zahl 0 an der Stelle 0 steht. Sei $f(i)$ die Zahl an der Stelle i. (Wir bemerken, dass f eine Permutation von $[0, n - 1]$ ist.) Sei a die Position mit $f(a) = n - 1$.

Da alle n-Sehnen mit 0 geordnet sind und alle Punkte Endpunkt einer n-Sehne sind, sind diese Sehnen alle parallel und es gilt $f(i) + f(-i) = n$ für alle i. Da auch alle $(n-1)$-Sehnen geordnet sind, und jeder Punkt Endpunkt einer $(n-1)$-Sehne ist, sind auch diese Sehnen alle zueinander parallel und es gilt $f(i)+f(a-i)=n-1$ für alle i. Somit gilt auch $f(a-i)=f(-i)-1$ für alle i, und da $f(0)=0$ gilt, erhalten wir $f(-ak)=k$ für alle k (modulo n). Da f eine Permutation ist, muss $(a,n)=1$ gelten. Somit folgt $L_{n-1}\leq\varphi(n)$.

Um nun Gleichheit nachzuweisen, bleibt es festzustellen, dass diese Beschriftung schön ist. Um dies einzusehen, betrachten wir vier Zahlen w,x,y,z auf den Kreis mit $w+y=x+z$. Für ihre Postionen am Kreis gilt $(-aw)+(-ay)=(-ax)+(-az)$, was bedeutet, dass die Sehnen von w zu y und von x zu z parallel sind. Die Beschriftung ist also schön, und nach der Definition ist sie vom Typ II. Daraus folgt die Gültigkeit der Behauptung. $\square$