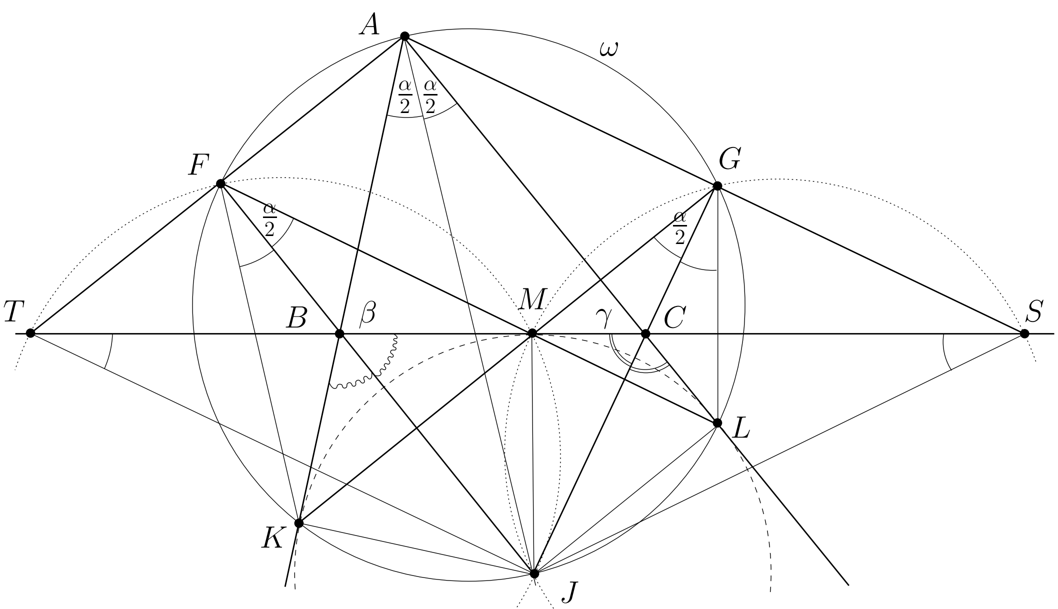
IMO 2012

Aufgabe 1: Zum Dreieck ABC sei J der Mittelpunkt des Ankreises, der dem Eckpunkt A gegenüber liegt. Dieser Ankreis berührt BC in M und AB und AC in K bzw. L. Die Geraden LM und BJ schneiden sich in F und die Geraden KM und CJ schneiden sich in G. Es seien T der Schnittpunkt der Geraden AF und BC sowie S der Schnittpunkt der Geraden AG und BC.
Man beweise, dass M der Mittelpunkt von ST ist.

(Der *Ankreis* von ABC, der dem Eckpunkt A gegenüber liegt, ist der Kreis, der die Strecke BC berührt sowie den Strahl AB jenseits von B und den Strahl AC jenseits von C.)

Lösung: Es seien α, β und γ wie üblich im Dreieck ABC definiert. AJ ist die Winkelsymmetrale in A, und es gilt somit $\angle JAK = \angle JAL = \frac{\alpha}{2}$. Wegen $\angle AKJ = \angle ALJ = 90°$ liegen die Punkte K und L auf dem Kreis ω mit Durchmesser AJ.



Da BK und BM Tangenten an den Ankreis sind, ist das Dreieck KBM gleichschenkelig. BJ ist die Winkelsymmetrale von $\angle KBM$, und es gilt somit $\angle MBJ = 90° - \frac{\beta}{2}$ und $\angle BMK = \frac{\beta}{2}$. Analog gilt auch $\angle MCJ = 90° - \frac{\gamma}{2}$ und $\angle CML = \frac{\gamma}{2}$. Zusätzlich gilt aber $\angle BMF = \angle CML$, und wir erhalten somit

$$\angle LFJ = \angle MBJ - \angle BMF = \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2} = \angle LAJ.$$

F liegt daher auf ω. Analog liegt auch G auf ω, und da AJ ein Durchmesser von ω ist, gilt $\angle AFJ = \angle AGJ = 90°$.

Die Geraden AB und BC sind symmetrisch bezüglich BF, und wegen $AF \perp BF$ und $KM \perp BF$ liegen die Strecken TM und AK symmetrisch bezüglich BF, womit $|TM| = |AK|$ gilt. Analog gilt auch $|SM| = |AL|$, und da AK und AL gleich lange Tagenten des Ankreises sind, folgt $|SM| = |TM|$, wie behauptet. qed

Aufgabe 2: Es sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl und es seien $a_2, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen, so dass $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$ gilt.
Man beweise:

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

Lösung: Definieren wir $a_2 = \frac{x_2}{x_1}$, $a_3 = \frac{x_3}{x_2}$, …, $a_n = \frac{x_1}{x_{n-1}}$, so gilt sicher die Nebenbedingung, und die Ungleichung schreibt sich als

$$(x_1 + x_2)^2 (x_2 + x_3)^3 \dots (x_{n-1} + x_1)^n > n^n x_1^2 x_2^3 \dots x_{n-1}^n,$$

mit positiven Werten von $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} > 0$. Die AM-GM Ungleichung liefert aber sofort

$$(x_1 + x_2)^2 \geq 2^2 x_1 x_2$$

sowie

$$\begin{array}{rcc}
(x_2 + x_3)^3 = & \left(2\left(\frac{x_2}{2}\right) + x_3\right)^3 & \geq 3^3 \left(\dfrac{x_2}{2}\right)^2 x_3 \\
(x_3 + x_4)^4 = & \left(3\left(\frac{x_3}{3}\right) + x_4\right)^4 & \geq 4^4 \left(\dfrac{x_3}{3}\right)^3 x_4 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
(x_{n-1} + x_1)^n = & \left((n-1)\left(\frac{x_{n-1}}{n-1}\right) + x_1\right)^n & \geq n^n \left(\dfrac{x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} x_1.
\end{array}$$

Multiplikation all dieser Unglechungen liefert die Behauptung, wobei aber noch der Gleichheitsfall möglich ist. Gleichheit würde aber voraussetzen, dass $x_1 = x_2$, $x_2 = 2x_3$, …, $x_{n-1} = (n-1)x_1$ gilt, was aber zur Folge hätte, dass $x_1 = (x-1)! \cdot x_1$ gelten müßte. Dies ist aber wegen $x_1 > 0$ und $n \geq 3$ unmöglich, womit der Beweis abgeschlossen ist. qed

Aufgabe 3: Das *Ratespiel des Lügners* ist ein Spiel, das von zwei Spielern A und B gespielt wird. Die Spielregeln hängen von zwei positiven ganzen Zahlen k und n ab, die beiden Spielern bekannt sind.
Zu Beginn des Spiels wählt A ganze Zahlen x und N mit $1 \leq x \leq N$. A hält x geheim und teilt N dem Spieler B wahrheitsgemäß mit. Nun versucht Spieler B Informationen über x herauszufinden, indem er Fragen von folgendem Typ an A richtet. Jede Frage besteht darin, eine beliebige Menge S positiver ganzer Zahlen (möglicherweise dieselbe Menge einer früheren Frage) zu nennen und A zu fragen, ob x in S enthalten ist. Der Spieler B darf beliebig viele derartige Fragen stellen. Der Spieler A muss jede Frage von B sofort mit *ja* oder *nein* beantworten, wobei er so oft lügen darf wie er möchte. Die einzige Einschränkung besteht darin, dass es unter je $k+1$ aufeinander folgenden Antworten mindestens eine wahrheitsgemäße geben muss.
Nachdem B so viele Fragen gestellt hat, wie er wollte, muss er eine Menge X nennen, die aus höchstens n positiven ganzen Zahlen besteht. Wenn x in X liegt, gewinnt B. Andernfalls verliert B.
Man beweise:

1. Wenn $n \geq 2^k$, so kann B einen Sieg erzwingen.
2. Für alle genügend große k gibt es ein $n \geq 1{,}99^k$, so dass B den Sieg nicht erzwingen kann.

Lösung: a) Wir nehmen an, B kenne zunächst eine Menge T mit m Elementen, die sicher x enthält. Dies ist zu Beginn der Fall für $m = N$ und $T = \{1, 2, \dots, N\}$. Für $m > 2^k$ zeigen wir, wie B eine Zahl $y \in T$ mit $x \neq y$ bestimmen kann. Durch wiederholte Durchführung dieses Schritts kann B somit die Mächtigkeit von T schrittwiese auf einen Wert kleiner als n reduzieren, und somit das Spiel gewinnen.

Nehmen wir o.B.d.A. an, es sei $T = \{0, 1, \dots, 2^k, \dots, m-1\}$. (Ist dies nicht der Fall, kann man die tatsächlichen Zahlen mit dieser Liste benennen.) B fragt zunächst nur nach der einelementigen Menge mit dem Element 2^k. Antwortet A $k+1$-mal mit *nein*, so ist $x \neq 2^k$ sicher wahr. Anwortet A dazwischen einmal mit *ja*, hört B sofort mit dieser Menge auf. Er fragt dann anschließend für jedes $i = 1, 2, \ldots, k$ nach der Menge mit allen Zahlen als Elementen, die in der Menge $\{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}$ liegen und an der i-ten Stelle der Binärdarstellung die Ziffer 0 haben. Egal wie A nun antwortet, sind die Antworten sicher alle mit irgendeiner Zahl y aus der Menge inkonsistent (d.h. wenn die zahl in S enthalten ist, ist die Antwort *nein* und wenn sie nicht in S enthalten ist, ist die Antwort *ja*). Die Antwort *ja* für 2^k ist aber auch mit dieser Zahl y inkonsistent, und es gilt somit sicher $y \neq x$. Ansonsten wären alle $k + 1$ Antworten unwahr, was nicht möglich ist. B hat jedenfalls eine zahl gefunden, die von x verschieden ist, und die Menge kann verkleinert werden.

b) Wir zeigen für $1 < \lambda < 2$ und $n = \lfloor (2 - \lambda)\lambda^{k+1} \rfloor - 1$, dass B keinen Gewinn erzwingen kann. Um den Beweis zu vervollständigen, genügt es dann λ mit $1{,}99 < \lambda < 2$ und k genügend groß zu wählen, dass

$$n = \lfloor (2 - \lambda)\lambda^{k+1} \rfloor - 1 \geq 1{,}99^k$$

gilt.

Nun betrachten wir die folgende Strategie von A. Zunächst wählt A $N = n + 1$ und $x \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ beliebig. Nach jeder gegebenen Antwort bestimmt A für jedes $i = 1, 2, \ldots, n+1$ die Anzahl m_i von Antworten, die er bis zu diesem Zeitpunkt schon gegeben hat, die mit i inkonsistent sind. Um die nächste Antwort zu entscheiden, verwendet er die Zahl

$$\phi = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^{m_i}.$$

Welche Frage B auch stellen mag, verwendet A die Antwort, die den Wert von ϕ minimiert.

Wir behaupten nun, dass der Wert von ϕ nach dieser Strategie immer kleiner als λ^{k+1} bleiben wird. Es kann daher kein Exponent m_i in ϕ jemals größer als k sein, und A wird dahwer niemals mehr als k Antworten geben, die mit einem bestimmten i inkonsistent sind. Speziell trifft dies auf die Zahl x zu, und A wird somit niemals mehr als k Mal hintereinander lügen. Wenn dies also hält, entspricht die Strategie von A den Regeln. Da die Strategie nicht von x abhängig ist, kann B keine Schlüsse über x ziehen, und kann somit auch niemals gewinnen.

Es bleibt also zu zeigen, dass zu jedem Zeitpunkt $\phi < \lambda^{k+1}$ gilt. Zu Beginn ist jedes m_i gleich 0, und diese Eigenschaft gilt somit zu Beginn sicher wegen $1 < \lambda < 2$ und $n = \lfloor (2 - \lambda)\lambda^{k+1} \rfloor - 1$. Nehmen wir nun an, es gälte $\phi < \lambda^{k+1}$ zu irgendeinem Zeitpunkt, und B hat soeben gefragt, ob $x \in S$ für irgendeine Menge S gilt. Je nachdem ob A mit *ja* oder *nein* antwortet wird der neue Wert von ϕ nun

$$\phi_1 = \sum_{i \in S} 1 + \sum_{i \notin S} \lambda^{m_i+1} \qquad \text{oder} \qquad \phi_2 = \sum_{i \in S} \lambda^{m_i+1} + \sum_{i \notin S} 1.$$

Da A die Möglichkeit wählt, die ϕ minimiert, wird der neue Wert von ϕ nun gleich $\min(\phi_1, \phi_2)$ sein. Nun gilt

$$\min(\phi_1, \phi_2) \leq \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i \in S} \left(1 + \lambda^{m_i+1}\right) + \sum_{i \notin S} \left(\lambda^{m_i+1} + 1\right)\right) = \frac{1}{2}(\lambda\phi + n + n).$$

Wegen $\phi < \lambda^{k+1}$, führen die Annahmen $\lambda < 2$ und $n = \lfloor (2 - \lambda)\lambda^{k+1} \rfloor - 1$ zu

$$\min(\phi_1, \phi_2) < \frac{1}{2}(\lambda^{k+2} + (2 - \lambda)\lambda^{k+1}) = \lambda^{k+1}.$$

Daraus folgt die Behauptung, womit der Beweis abgeschlossen ist. qed

Aufgabe 4: Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, so dass für alle ganzen Zahlen a, b, c mit $a + b + c = 0$ die folgende Gleichung gilt:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Hier bezeichne $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen.)

Lösung: Setzen wir zunächst $a = b = c = 0$, erhalten wir $3f(0)^2 = 6f(0)^2$, und somit

$$f(0) = 0.$$

Mit $b = -a$ und $c = 0$ erhalten wir $(f(a) - f(-a))^2 = 0$, und f ist somit eine gerade Funktion, d.h. es gilt für alle ganzen Werte von a

$$f(a) = f(-a).$$

Mit $b = a$ und $c = -2a$ erhalten wir $2f(a)^2 + f(2a)^2 = 2f(a)^2 + 4f(a)f(2a)$, und es folgt somit für alle ganzen Werte von a

$$f(2a) = 0 \quad \text{oder} \quad f(2a) = 4f(a).$$

Nehmen wir nun an, es gäbe ein $r \geq 1$, mit $f(r) = 0$. In diesem Fall können wir $b = r$ und $c = -a-r$ setzen, und erhalten wegen $f(-a-r) = f(a+r)$ die Beziehung $(f(a+r)-f(a))^2 = 0$. In diesem Fall ist also f periodisch mit der Periode k, d.h. es gilt für alle ganzen Werte von a

$$f(a + r) = f(a).$$

Gilt insbesondere $f(1) = 0$, so ist f konstant, und es gilt $f(a) = 0$ für alle ganzen Wette von a. Dies ist offensichtlich eine Lösung der gegebenen Funktionalgleichung. Im weiteren setzen wir also $f(1) = k \neq 0$ voraus.

Wegen $f(1) = k$ folgt nun entweder $f(2) = 0$ oder $f(2) = 4k$. Im Fall $f(2) = 0$ ist die Funktion periodisch mit der Periode 2, und es gilt $f(a) = 0$ für gerade a und $f(a) = k$ für ungerade a. Wir werden später bestätigen, dass derartige Funktionen die Bedingung erfüllen und setzten im Weiteren $f(2) = 4k \neq 0$ voraus.

Nun gilt aber auch entweder $f(4) = 0$ oder $f(4) = 16k$. Im ersten Fall ist f periodisch mit der Periode 4 und es gilt $f(3) = f(-1) = f(1) = k$, und somit $f(4n) = 0$, $f(4n+1) = f(4n+3) = k$ und $f(4n + 2) = 4k$. Wir werden später bestätigen, dass derartige Funktionen die Bedingung erfüllen und setzten im Weiteren $f(4) = 16k \neq 0$ voraus.

In diesem Fall zeigen wir zuerst, dass $f(3) = 9k$ gilt.Dies folgt aus den Annahmen:

$$a = 1, b = 2, c = -3 \iff f(3)^2 - 10kf(3) + 9k^2 = 0 \iff (f(3) - k)(f(3) - 9k) = 0, \quad \text{und}$$

$$a = 1, b = 3, c = -4 \iff f(3)^2 - 34kf(3) + 225k^2 = 0 \iff (f(3) - 9k)(f(3) - 25k) = 0.$$

Nun zeigen wir induktiv, dass in diesem Fall $f(x) = kx^2$ für alle ganzzahligen x gilt. Wir haben schon festegestellt, dass dies für $x = 1, 2, 3, 4$ gilt. Nun nehmen wir an, es sei $n \geq 4$ und $f(x) = kx^2$ gelte für alle $x \in [0, n]$. Setzen von $a = n$, $b = 1$ und $c = -n - 1$ bzw. $a = n - 1$, $b = 2$ und $c = -n - 1$ ergibt nun

$$f(n + 1) \in \{k(n + 1)^2, k(n - 1)^2\} \quad \text{bzw.} \quad f(n + 1) \in \{k(n + 1)^2, k(n - 3)^2\}.$$

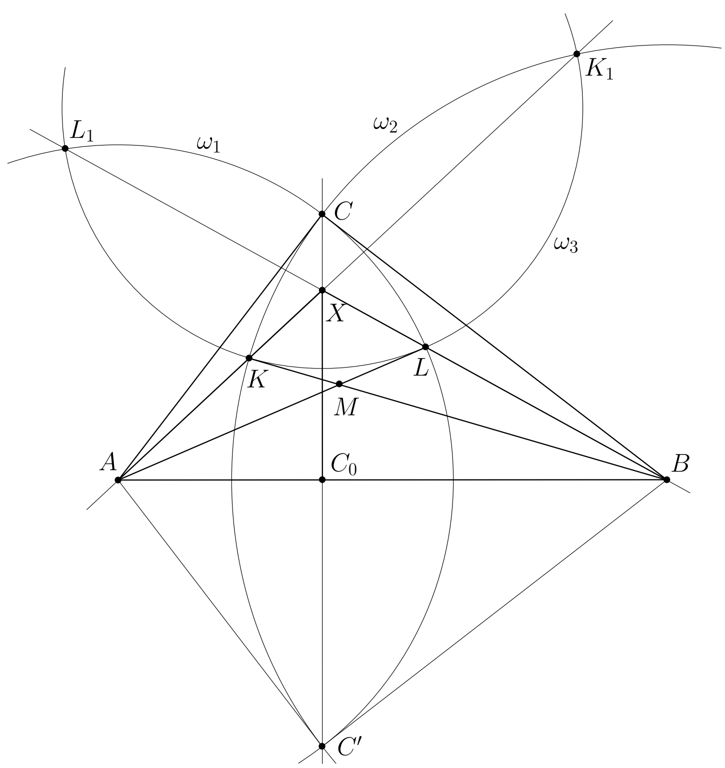
Da $k(n - 1)^2 \neq k(n - 3)^2$ für $n \neq 2$ sicher gilt, folgt jedenfalls $f(n + 1) = k(n + 1)^2$, was die Induktion für positive n abschließt. Wegen $f(a) = -f(-a)$ gilt dies auch für negative Werte, und wir erhalten als letzte Möglichkeit für eine Lösung $f(x) = kx^2$.

Wir haben also erkannt, dass es vier Kandidaten für Lösungen gibt: $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = kx^2$, $f_3(x) = 0$ for gerade x und $= k$ für ungerade x und $f_4(x) = 0$ für $x \equiv 0 \pmod 4$, $= k$ für $x \equiv 1 \pmod 2$ und $= 4k$ für $x \equiv 2 \pmod 4$. Es bleibt also nur mehr zu zeigen, dass diese Funktionen tatsächlich alle die Funktionalgleichung erfüllen.

Dies ist für $f_1(x) = 0$ offensichtlich. Für $f_2(x) = kx^2$ erhalten wir durch Einsetzen und kürzen durch k^2 wegen $(-a-b)^2 = (a+b)^2$ die Gleichung $a^4+b^4+(a+b)^4 = 2a^2b^2+2a^2(a+b)^2+2b^2(a+b)^2$. Durch ausmultiplizieren sieht man sofort, dass dies für alle a und b gilt. Für f_3 bemerken wir wegen $a+b+c=0$, dass entweder alle drei Zahlen a, b und c gerade sind, in welchem Fall alle Funktionswerte 0 sind, oder genau zwei dieser Zahlen ungerade sind, in welchem Fall beide Seiten der Gleichung $2k^2$ sind. Jedenfalls löst f_3 sicher die Funktionalgleichung. Schließlich erkennen wir für f_4, dass analoge Paritätsüberlegungen nur die Tripel $(0, k, k)$, $(4k, k, k)$, $(0, 0, 0)$ und $(0, 4k, 4k)$ erlauben, die aber alle wahre Aussagen ergeben, womit auch f_4 die Funktionalgleichung löst, was den Beweis abschließt. qed

Aufgabe 5: Es seien ABC ein Dreieck mit $\sphericalangle BCA = 90°$ und C_o der Höhenfußpunkt der Höhe durch C. Sei X ein innerer Punkt der Strecke CC_o. Es bezeichne K den Punkt auf der Strecke AX für den $|BK| = |BC|$ gilt. Entsprechend bezeichne L den Punkt auf der Strecke BX für den $|AL| = |AC|$ gilt. Schließlich bezeichne M den Schnittpunkt von AL und BK.
Man beweise: $|MK| = |ML|$.

Lösung: Es sei C' der zu C symmetrische Punkt bezüglich AB. Ferner seien ω_1 und ω_2 die Kreise mit Mittelpunkt in A bzw. B durch L bzw. K. Da $AC' = AC = AL$ und $BC' = BC = BK$ gelten, gehen ω_1 und ω_2 beide durch C'. Da $\angle BCA = 90^o$ gilt, berühren AC den Kreis ω_2 in C und BC den Kreis ω_1 ebenfalls in C. Nun seien $K_1 \neq K$ der zweite Schnittpunkt von AX mit ω_2 und $L_1 \neq L$ der zweite Schnittpunkt von BX mit ω_1.



Betrachten wir die Potenz von X bezüglich der Kreise ω_2 und ω_1, erhalten wir

$$XK \cdot XK_1 = XC \cdot XC' = XL \cdot XL_1,$$

und die Punkte K_1, L, K und L_1 liegen daher auf einem gemeinsamen Kreis ω_3.

Aus der Potenz von A bezüglich ω_2 folgt nun

$$AL^2 = AC^2 = AK \cdot AK_1,$$

womit wir erkennen, dass AL den Kreis ω_3 in L berührt. Analog berührt auch BK den Kreis ω_3 in K. Wir sehen, dass sowohl MK als auch ML Tangenten an ω_3 sind, woraus wie behauptet $MK = ML$ folgt. qed

Aufgabe 6: Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n für die es nicht-negative ganze Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gibt, so dass gilt:

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Lösung: Derartige Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ exisitieren genau dann, wenn $n \equiv 1 \pmod 4$ oder $n \equiv 2 \pmod 4$ gilt.

Nehmen wir nunächst an, es gebe nicht-negative ganze Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^{a_k}} = 1$. Dann gilt $1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \ldots + n \cdot x_n = 3^a$, wobei alle $x_1, \ldots, x_n$ Dreierpotenzen sind, und $a \geq 0$ gilt. Die rechte Seite dieser Gleichung ist offensichtlich ungerade, und die linke hat dieselbe Parität wie $1 + 2 + \ldots + n$, womit wir wissen, dass die Summe der ganzen Zahlen von 1 bis n ungerade sein muss. Der Ausdruck $\frac{n(n+1)}{2}$ ist aber genau dann ungerade, wenn $n \equiv 1, 2 \pmod 4$ gilt. Es bleibt also noch zu zeigen, dass es für alle derartige n auch immer $a_1, \ldots, a_n$ gibt, die die Gleichungen lösen.

Um dies zu zeigen, bezeichnen wir eine Folge $b_1, b_2, \ldots, b_n$ als *passend*, wenn es nicht-negative ganze Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gibt, sodass

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{b_1}{3^{a_1}} + \frac{b_2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{b_n}{3^{a_n}} = 1$$

gilt. Es sei nun b_k ein Glied einer passenden Folge $b_1, b_2, \ldots, b_n$ mit Exponenten $a_1, a_2, \ldots, a_n$, und seien u, v nicht-negative ganze Zahlen mit der Summe $3b_k$. Wir beobachten, dass

$$\frac{1}{2^{a_k+1}} + \frac{1}{2^{a_k+1}} = \frac{1}{2^{a_k}} \quad \text{und} \quad \frac{u}{3^{a_k+1}} + \frac{v}{3^{a_k+1}} = \frac{b_k}{3^{a_k}}$$

gilt. Es folgt also, dass die Folge $b_1, \ldots, b_{k-1}, u, v, b_{k+1}, \ldots, b_n$ ebenfalls passend ist. Die Exponenten a_i bleiben für die unveränderten b_i ebenfalls unverändert, und die neuen Zähler u und v haben jeweils den Exponent $a_k + 1$.

Nun zeigen wir, dass dieser Schluss auch in umgekehrter Richtung gilt. Werden zwei Zähler u und v in der Folge durch einen Ausdruck der Gestalt $\frac{u+v}{3}$ ersetzt, und ist die reultierende Folge ebenfalls passend, so war auch die Ausgangsfolge passend. Zu diesem Zweck sei α_n die Folge $1, 2, \ldots, n$. Um zu zeigen, dass α_n für $n \equiv 1, 2 \pmod{n}$ passend ist, transformieren wir sie durch $n - 1$ Änderungen $\{u, v\} \to \frac{u+v}{3}$, sodass die ein-elementige Folge α_1 verbleibt. Diese Folge ist passend mit $a_1 = 0$. Wir bemerken, dass $2m$ ignoriert werden kann falls m und $2m$ beide in der Folge enthalten sind, da in diesem Fall die Änderung $\{m, 2m\} \to m$ durchgeführt werden kann.

Es sei $n \geq 16$. Wir zeigen, dass in diesem Fall α_n durch 12 Operationen zu α_{n-12} reduziert werden kann. Wir schreiben $n = 12k + r$ mit $k \geq 1$ und $0 \leq r \leq 11$. Wenn $0 \leq r \leq 5$ gilt, können wir die letzten 12 Paare von α_n aufteilen in die beiden Einzelwerte $\{12k-6\}$ und $\{12k\}$, sowie die fünf Paare

$$\{12k - 6 - i, 12k - 6 + i\}, \;\; i = 1, \ldots, 5 - r; \qquad \{12k - j, 12k + j\}, \;\; j = 1, \ldots, r.$$

(Wenn $r \in \{0, 5\}$ gibt es nur eine Art von Paaren.) Nun können wir $12k-6$ und $12k$ ignorieren, da α_n auch $6k-3$ und $6k$ enthält. Die fünf Operationen $\{12k-6-i, 12k-6+i\} \to 8k-4$ und $\{12k-j, 12k+j\} \to 8k$ entfernen die 10 Zähler in den Paaren und ersetzen sie durch 5 neue, die entweder gleich $8k-4$ oder $8k$ sind. Diese können aber alle ignoriert werden, da $4k-2$ und $4k$ ebenfalls in der Folge enthalten sind. Es ist $4k \leq n-12$ gleichwertig mit $8k \geq 12-r$, und dies gilt für $r \in \{4, 5\}$. Gilt $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, so folgt aus $n \geq 16$ unmittelbar $k \geq 2$, und somit gilt auch $8k \geq 12-r$. Es läßt sich also α_n reduzieren auf α_{n-12}.

Der Fall $6 \leq r \leq 11$ verläuft analog. Wir betrachten die beiden Einzelwerte $\{12k\}$ und $\{12k+6\}$, sowie die fünf Paare

$$\{12k-i, 12k+i\}, \quad i = 1, \ldots, 11-r; \qquad \{12k+6-j, 12k+6+j\}, \quad j = 1, \ldots, r-6.$$

Wie zuvor können die Einzelwerte ignoriert werden, und die Paare können mit den Operationen $\{12k-i, 12k+i\} \to 8k$ und $\{12k+6-j, 12k+6+j\} \to 8k+4$ durch 5 neue Werte, die entweder gleich $8k-4$ oder $8k$ sind ersetzt werden. Diese können aber wiederum alle ignoriert werden, da $4k+2 \leq n-12$ (wegen $k \geq 1$ und $r \geq 6$) gilt. Wieder läßt sich also α_n auf α_{n-12} reduzieren.

Die Aufgabe läßt sich also auf $2 \leq n \leq 15$ reduzieren. Es gilt aber tatsächlich

$$n \in \{2, 5, 6, 9, 10, 13, 14\},$$

was genau in diesem Bereich die n mit $n \equiv 1, 2 \pmod 4$ sind. Die Fälle $n = 2, 6, 10, 14$ lassen sich auf $n = 1, 5, 9, 13$ reduzieren, da der letzte gerade Zähler in α_n ignoriert werden kann. Für $n = 5$ ergibt $\{4, 5\} \to 3$, und dann $\{3, 3\} \to 2$, worauf man die zwei auftretenden Werte 2 ignorieren kann. Für $n = 9$ ignorieren wir zunächst 6, und wenden dann folgende Schritte an: $\{5, 7\} \to 4$, $\{4, 8\} \to 4$, $\{3, 9\} \to 4$. Dann ignorieren wir die drei auftretenden Werte 4, und dann 2. Schließlich für $n = 13$ erreichen wir eine Reduktion auf $n = 10$ mittels $\{11, 13\} \to 8$, worauf wir 8 und 12 ignorieren, was den Beweis abschließt. qed

(1) $\frac{6}{3^4} \to \frac{6+15+16+17}{3^6}$

(2) $\frac{5+11}{3^5} \to \frac{5+11+15+17}{3^6}$ und $\frac{8}{3^5} \to \frac{8+16}{3^6}$