IMO 2011

Aufgabe 1: Für jede Menge $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ von vier paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen, deren Summe $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ mit s_A bezeichnet werde, sei n_A die Anzahl der Paare (i, j) mit $1 \leq i < j \leq 4$, für die $a_i + a_j$ die Zahl s_A teilt. Bestimme unter all diesen Mengen A diejenigen, für die n_A maximal ist.

Lösung: Wir bemerken zunächst, dass sicher $n_A \leq 4$ gelten muss. Nehmen wir o.B.d.A. an, dass $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ gilt, folgt sicher sowohl $a_1+a_2 < a_3+a_4$ als auch $a_1+a_3 < a_2+a_4$. Teilen aber entweder $a_2 + a_4$ oder $a_3 + a_4$ die Summe s_A, so muss $(a_2 + a_4)|s_a - (a_2 + a_4) = (a_1 + a_3)$ bzw. $(a_3 + a_4)|s_a - (a_3 + a_4) = (a_1 + a_2)$ gelten, was in jedem Fall einen Widerspruch ergibt.

Wir nehmen also im Folgenden an, dass $n_A = 4$ gilt, und wollen untersuchen, für welche a_i dies möglich ist.

Da jedenfalls $a_2 + a_4 \not| s_A$ und $a_3 + a_4 \not| s_A$ gelten, müssen

$$a_1 + a_2|s_A, \quad a_1 + a_3|s_A, \quad a_1 + a_4|s_A, \quad \text{und} \quad a_2 + a_3|s_A$$

gelten. Aus $a_1 + a_2|s_A$ folgt $a_1 + a_2|s_A - (a_1 + a_2) = a_3 + a_4$, und aus den analogen Ansätzen erhalten wir somit

$$a_1 + a_2|a_3 + a_4, \quad a_1 + a_3|a_2 + a_4, \quad a_1 + a_4|a_2 + a_3, \quad \text{und} \quad a_2 + a_3|a_1 + a_4.$$

Es gelten somit sicher die Beziehungen

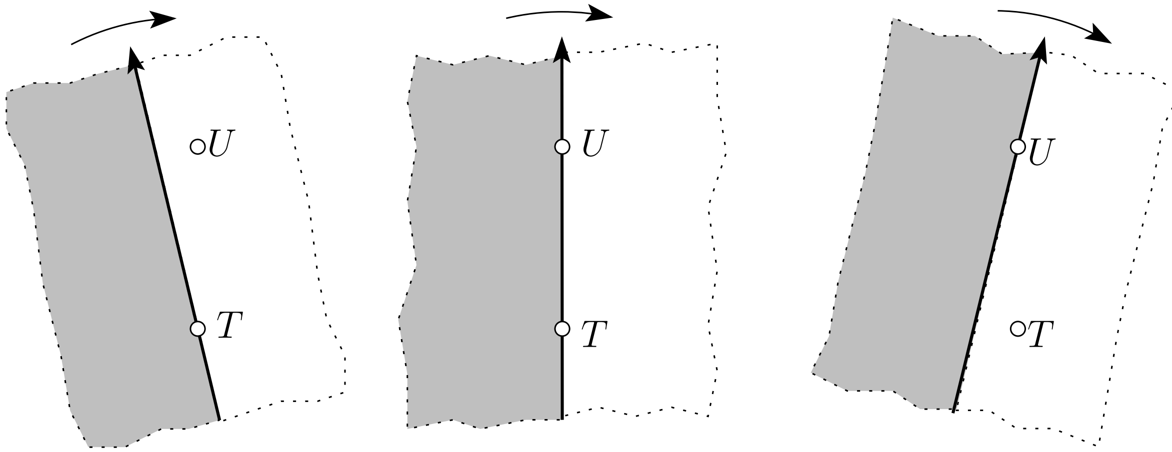
$$a_1 + a_4 = a_2 + a_3, \quad m(a_1 + a_2) = a_3 + a_4 \quad \text{und} \quad n(a_1 + a_3) = a_2 + a_4$$

mit $m > n \geq 2$. Addition der ersten und dritten Gleichungen ergibt $n(a_1 + a_3) = 2a_2 + a_3 - a_1$. Wenn $n \geq 3$ gilt, so folgt $n(a_1 + a_3) > 3a_3 > 2a_2 + a_3 > 2a_2 + a_3 - a_1$, was einen Widerspruch ergibt. Es gilt also sicher $n = 2$.

Aus der Summe der ersten und dritten Gleichungen folgt nun $6a_1 + 2a_3 = 4a_2$, und aus der zweiten und dritten $(m+1)a_1 + (m-1)a_2 = 2a_3$. Addiert man diese beiden Gleichungen, erhält man $(m + 7)a_1 = (5 - m)a_2$, woraus mann sofort erkennt, dass $5 - m \geq 1$ gelten muss. Wegen $m > n = 2$, kann nur $m = 3$ oder $m = 4$ gelten. Setzt man also für (m, n) die Werte $(3, 2)$ bzw. $(4, 2)$, kann man die Gleichungssysteme lösen, und es ergeben sich die Lösungen $\{d, 5d, 7d, 11d\}$ und $\{d, 11d, 19d, 29d\}$. qed

Aufgabe 2: Sei $\mathcal{S}$ eine endliche Menge von mindestens zwei Punkten in der Ebene. Dabei wird angenommen, dass keine drei Punkte von $\mathcal{S}$ kollinear sind. Als *Windmühle* bezeichnen wir einen Prozess der folgenden Art. Wir starten mit einer Geraden ℓ, die genau einen Punkt $P \in \mathcal{S}$ enthält. Die Gerade ℓ wird im Uhrzeigersinn um den *Drehpunkt* P so lange gedreht, bis sie zum ersten Mal auf einen weiteren Punkt aus $\mathcal{S}$, der mit Q bezeichnet sei, trifft. Die Gerade wird weiter im Uhrzeigersinn mit Q als neuem Drehpunkt gedreht, bis sie wieder auf einen Punkt aus $\mathcal{S}$ trifft. Dieser Prozess wird unbegrenzt fortgesetzt.
Man beweise, dass für geeignete Wahl eines Punktes $P \in \mathcal{S}$ und einer Ausgangsgeraden ℓ, die P enthält, die resultierende Windmühle jeden Punkt aus $\mathcal{S}$ unendlich oft als Drehpunkt hat.

Lösung: Wir stellen uns zunächst die Gerade ℓ als orientiert und o.B.d.A. im Uhrzeigersinn rotierend vor. Eine von ℓ begrentze Halbebene bezeichnen wir als die *orange* Seite von ℓ, und die andere als die *blaue* Seite. Nachdem der Drehpunkt gerade von einem Punkt T zu einen anderen Punkt U gewechselt ist, bemerken wir, dass T auf derselben seite von ℓ ist, wie es zuvor U war. Die Anzahl der Elemente von $\mathcal{S}$ auf der orangen Seite, sowie die Anzahl auf der blauen Seite bleiben daher während des geasmten Prozesses, bis auf die Momente in denen ℓ zwei Punkte verbindet, gleich.



Nun betrachten wir zunächst den Fall, dass $|\mathcal{S}| = 2n + 1$ ungerade ist. In diesem Fall gibt es durch jeden Punkt T von $\mathcal{S}$ eine Gerade mit der Eigenschaft, dass sich je n Punkte von $\mathcal{S}$ auf den beiden Seiten von der Geraden befinden. Um dies zu sehen, nehmen wir eine orientierte Gerade durch T, und nehmen an, es befänden sich auf ihrer orangen Seite genau $n + r$ Punkte von $\mathcal{S}$. Gilt $r = 0$, so ist die Behauptung schon gezeigt. Es gelte also $r \neq 0$. Drehen wir die Gerade um 180^o um T, so ändert sich die Anzahl der Punkte auf der orangen Seite der Geraden immer um genau 1 wenn die Gerade durch einen anderen Punkt von $\mathcal{S}$ geht. Nach der Drehung um 180^o ist die Anzahl der Punkte auf der orangen Seiten offensichtlich gleich $n - r$, und alle Werte zwischen $n + r$ und $n - r$ wurden irgendwann angenommen. Es existiert also eine Zwischenlage, bei der sich genau n Punlkte auf der orangen Seite (und somit auch auf der blauen Seite) befunden haben, wie es behauptet wurde.

Nun wählen wir einen beliebigen Punkt P aus $\mathcal{S}$ und eine Gerade ℓ durch P, die je genau n Punkte von $\mathcal{S}$ auf den beiden Seiten hat. Wir zeigen nun, dass jeder Punkt von $\mathcal{S}$ im Verlaufe einer Drehung der Windmühle um 180^o irgendwann die Rolle des Drehpunktes annimmt. Um dies zu sehen, wählen wir einen beliebigen Punkt T aus $\mathcal{S}$ und eine Gerade ℓ_T durch T, die $\mathcal{S}$ genau halbiert. Der Punkt T ist der einzige Punkt von $\mathcal{S}$, durch den eine Gerade in dieser Richtung $\mathcal{S}$ halbieren kann, da jede Parallelverschiebung das Gleichgewicht zerstören würde. Zu dem Zeitpunkt, wo die Windmühle parallel zu ℓ_T liegt, muss also T der Drehpunkt sein.

Nun nehmen wir an, dass $|\mathcal{S}| = 2n$ gerade ist. Ähnlich wie im ungeraden Fall existiert zu jedem Punkt T aus $\mathcal{S}$ eine orientierte Gerade ℓ_T durch T mit $n - 1$ Punkten aus $\mathcal{S}$ auf der orangen Seite und n Punkte auf der blauen Seite. Wir wählen eine solche Gerade durch einen beliebigen Punkt P aus $\mathcal{S}$ als Ausgangsgerade für die Windmühle.

Wir zeigen nun, dass jeder Punkt von $\mathcal{S}$ im Verlaufe einer Drehung der Windmühle um 360^o irgendwann die Rolle des Drehpunktes annimmt. Um dies zu sehen, wählen wir einen beliebigen Punkt T aus $\mathcal{S}$ und eine Gerade ℓ_T durch T, die $\mathcal{S}$ so teilt, dass $n - 1$ Punkte auf der orangen Seite und n Punkte auf der blauen Seite liegen. Der Punkt T ist wieder der einzige Punkt von $\mathcal{S}$, durch den eine Gerade in dieser Richtung mit dieser Eigenschaft gehen kann, da wieder jede Parallelverschiebung das Gleichgewicht zerstören würde. Zu dem Zeitpunkt, wo die Windmühle parallel zu ℓ_T liegt, muss also T der Drehpunkt sein. Die restliche Überlegung des ungeraden Falls gilt nun auch in diesem Fall, und wir sehen wiederum, dass jeder Punkt von $\mathcal{S}$ im Verlaufe der Drehung irgendwann die Rolle des Drehpunkts einnimmt.

In beiden Fällen werden also alle Punkte von $\mathcal{S}$ im Verlaufe einer Drehung um 180^o bzw. 360^o beucht, und dies gilt somit für jeden Punkt aus $\mathcal{S}$ wie behauptet unendlich oft. qed

Aufgabe 3: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die die Bedingung

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

für alle reellen Zahlen x und y erfüllt.
Man beweise, dass $f(x) = 0$ für alle $x \leq 0$ gilt.

Lösung: Setzen wir in der Bedingung $y = t - x$ ein, so erhalten wir die Bedingung

$$f(t) \leq tf(x) - xf(x) + f(f(x)).$$

Seien nun a, b reelle Zahlen. In der zuletzt erhaltenen Beziehung setzen wir $t = f(a)$, $x = b$ bzw. $t = f(b)$, $x = a$ und erhalten die beiden Beziehungen

$$\begin{aligned} f(f(a)) - f(f(b)) &\leq f(a)f(b) - bf(b), \quad \text{und} \\ f(f(b)) - f(f(b)) &\leq f(a)f(b) - af(a). \end{aligned}$$

Addieren dieser beiden Ungleichungen ergibt

$$2f(a)f(b) \geq af(a) + bf(b),$$

und setzen wir nun $b = 2f(a)$, so folgt daraus $2f(a)f(b) \geq af(a) + 2f(a)f(b)$, was gleichwertig ist mit $af(a) \leq 0$. Wir sehen also, dass $f(a) \geq 0$ für alle $a < 0$ gilt.

Nehmen wir nun an, es gelte $f(x) > 0$ für irgenein reelles x. Aus der Beziehung $f(t) \leq tf(x) - xf(x) + f(f(x))$ folgt für jedes t mit $t < \frac{xf(x)-f(f(x))}{f(x)}$ in diesem Fall $f(t) < 0$, im Widerspruch zu $f(a) \geq 0$ für alle $a < 0$. Es gilt also $f(x) \leq 0$ für alle reellen x, und da auch $f(a) \geq 0$ für alle $a < 0$ gilt, folgt $f(x) = 0$ für alle $x < 0$.

Es bleibt also nur noch, den Wert von $f(0)$ zu bestimmen. Setzen wir in der Beziehung $f(t) \leq tf(x) - xf(x) + f(f(x))$ nun $t = x < 0$, so folgt $f(x) \leq f(f(x))$, und da $f(x) = 0$ gilt, folgt hieraus $0 \leq f(0)$. Zusammnen mit der bereits bekannten Beziehung $f(x) \leq 0$ für alle reellen x ergibt dies $f(0) = 0$, und der Beweis ist fertig. qed

Aufgabe 4: Sei $n > 0$ eine ganze Zahl. Gegeben seien eine Balkenwaage und n Gewichtsstücke mit den Gewichten 2^0, $2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Wir sollen jedes der n Gewichtsstücke, eines nach dem anderen, so auf die Waage legen, dass die rechte Schale zu keinem Zeitpunkt schwerer als die linke ist. In jedem Zug wählen wir ein Gewichtsstück aus, das zu diesem Zeitpunkt noch nicht auf die Waage gelegt wurde und legen es entweder auf die linke oder die rechte Schale bis alle Gewichtsstücke verwendet worden sind.
Man bestimme die Anzahl derartiger Folgen mit n Zügen.

Lösung: Wir bezeichnen die Anzshl der Möglichkeiten, die ersten n Gewichtsstücke zu platzieren als $f(n)$. Offensichtlich gilt $f(1) = 1$, und wir können somit $n \geq 2$ voraussetzen. In diesem Fall behaupten wir nun, dass $f(n) = (2n-1)f(n-1)$ gilt. Dies können wir folgendermaßen begründen.

Nach dem ersten Zug ist die linke Schale sicher um mindestens 1 schwerer als die rechte. Abgesehen vom Gewichtsstück mit dem Gewicht $2^0 = 1$ ergibt also jede Möglichkeit alle n Gewichtsstücke zu platzieren eine Möglichkeit, die Gewichte $2^1, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$ zu platzieren. Dividiert man von jedem Gewichtsstück das Gewicht durch 2, ändert dies die Antwort nicht. Die Anzahl der Möglichkeiten, diese Gewichtsstücke zu platzieren ist also genau $f(n-1)$.

Nun betrachten wir das Gewichtsstück mit dem Gewicht 1. Wenn dieses im ersten Zug platziert wird, kann es nur auf die linke Waagschale gelegt werden. In jedem anderen Zug kann es aber in irgendeines der beiden Waagschalen platziert werden, weil die Differenz der Summe der Gewichte auf der linken und der Summe der Gewichte auf der rechten Waagschale mindestens 2 beträgt. Es gibt also genau $2n-1$ Möglichkeiten, das Platzieren des Gewichtsstücks mit dem Gewicht 1 in jede gegebene Folge der übrigen Gewichte einzuschieben. Wir sehen also, dass tatsächlich, wie behauotet, $f(n) = (2n-1)f(n-1)$ gilt.

Mit einer sehr einfachen Induktion ergibt sich also wegen $f(1) = 1$, dass

$$f(n) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) = (2n-1)!!$$

gilt, und wir sind fertig. qed

Aufgabe 5: Sei f eine Funktion, die die Menge der ganzen Zahlen in die Menge der positiven ganzen Zahlen abbildet. Für je zwei ganze Zahlen m und n sei die Differenz $f(m) - f(n)$ durch $f(m-n)$ teilbar.

Man beweise für alle ganzen Zahlen m, n mit $f(m) \le f(n)$, dass $f(n)$ durch $f(m)$ teilbar ist.

Lösung: Es seien x und y ganze Zahlen mit $f(x) < f(y)$. Wegen

$$f(x-y) \mid |f(x) - f(y)| = f(y) - f(x) > 0,$$

folgt $f(x-y) \le f(y) - f(x) < f(y)$. Somit gilt für die Zahl $d = f(x) - f(x-y)$ die Beziehung

$$-f(y) < -f(x-y) < d < f(x) < f(y).$$

Setzt man in der Voraussetzung $m := x$ und $n := x - y$, so teilt $f(m-n) = f(y)$ sicher die Zahl $f(m) - f(n) = f(x) - f(x-y) = d$, und es folgt somit $d = 0$, was gleichwertig ist mit $f(x) = f(x-y)$. Setzen wir nun in der Voraussetzung $m := x$ und $n := y$, folgt, dass $f(x) = f(x-y) \mid f(x) - f(y)$ gilt, womit auch $f(x) \mid f(y)$ wie behauptet folgt. qed

Aufgabe 6: Es seien ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit dem Umkreis Γ und ℓ eine Tangente an Γ. Ferner seien ℓ_a, ℓ_b und ℓ_c die Geraden, die durch Spiegelungen von ℓ an den Geraden BC, CA bzw. AB entstehen.

Man beweise, dass der Umkreis des Dreiecks, das von den Geraden ℓ_a, ℓ_b und ℓ_c gebildet wird, den Kreis Γ berührt.

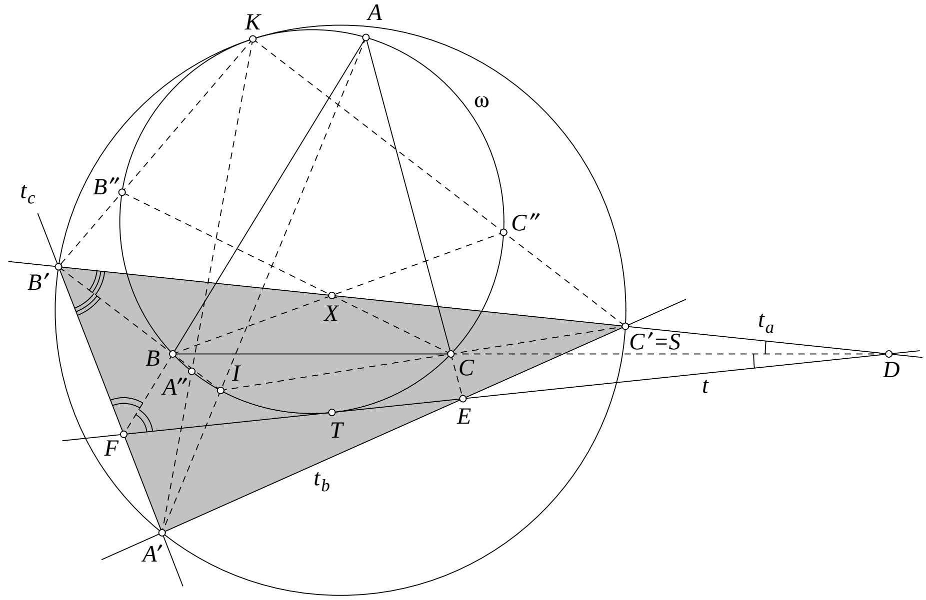
Lösung: Im folgenden sind alle Winkelangaben orientiert modulo 180^o gegen den Uhrzeigersinn zu verstehen.

Es sei T der Berührpunkt von ℓ und Γ. Ferner seien $A' := \ell_b \cap \ell_c$, $B' := \ell_c \cap \ell_a$ und $C' := \ell_a \cap \ell_b$. Außerdem definieren wir den Punkt A'' auf Γ mit $TA = AA''$ (und $A'' \neq T$, außer TA ist ein Durchmesser von Γ). Analog werden auch Punkte B'' und C'' definiert.

Da die Punkte C und B die Mittelpunkte der Bögen TC'' bzw. TB'' sind, gilt

$$\begin{aligned}
\angle(\ell, B''C'') &= \angle(\ell, TC'') + \angle(TC'', B''C'') = 2\angle(\ell, TC) + 2\angle(TC'', BC'') \\
&= 2(\angle(\ell, TC) + \angle(TC, BC)) = 2\angle(\ell, BC) = \angle(\ell, \ell_a),
\end{aligned}$$

und es folgt, dass ℓ_a parallel zu $B''C''$ liegt. Analaog gilt auch $\ell_b \| A''C''$ und $\ell_c \| A''B''$. Es gibt also entweder eine zentrische Streckung oder eine Translation, die das Dreieck $A'B'C'$ in das Dreieck $A''B''C''$ überführt. Wir werden nun zeigen, dass die Dreiecke zentrisch ähnlich sind, mit einem Ähnlichkeitszentrum K auf Γ. Daraus folgt dann, dass ihre Umkreise ebenfalls zentrisch ähnlich sind, und einander in K berühren.



Um dieses Ziel zu erreichen, wollen wir zuerst zwei Lemmata beweisen:

Lemma 1: Der Schnittpunkt X von $B''C$ und BC'' liegt auif ℓ_a.

Beweis von Lemma 1: Offensichtlich sind die Geraden CT und CB'' symmetrische bezüglich BC, und ebenso die Geraden BT und BC'' somit sind auch die Schnittpunkte X und T symmetrische bezüglich BC, und daher liegt X auf ℓ_a.

Lemma 2: Der Schnittpunkt I von BB' und CC' liegt auf Γ.

Beweis von Lemma 2: Wir nehmen an, dass ℓ zu keiner Seite von AC parallel liegt; diese Fälle können an Grenzfälle betrachtet werden. Es seien also $D := \ell \cap BC$, $E := \ell \cap CA$ und $F := \ell \cap AB$.

Aufgrund der Symmetrie ist D eine Winkelsymmetrale vom Winkel zwischen $B'D$ und FD, und analog ist FB ein Winkelsymmetrale vom Winkel zwischen $B'F$ und DF. Es is B somit entweder der Inkriesmittelpunkt von $B'DF$ oder von diesem dreieck ein Ankreismittelpunkt. Jedenfalls gilt aber $\angle(BD, DF) + \angle(DF, FB) + \angle(B'B, B'D) = 90^o$, und somit gilt

$$\angle(B'B, B'C') = \angle(B'B, B'D) = 90^o - \angle(BC, DF) - \angle(DF, BA) = 90^o - \angle(BC, AB).$$

Analog erhalten wir auch $\angle(C''C, B'C') = 90^o - \angle(BC, AC)$, und somit gilt

$$\angle(BI, CI) = \angle(B'B, B'C') + \angle(B'C', C'C) = \angle BC, AC) - \angle(BC, AB) = \angle(AB), AC),$$

was aber bedeutet, dass ABIC ein Sehnenviereck ist.

Nun können wir den Beweis abschließen.

Sei K der zweite Schnittpunkt von $B'B''$ und Γ. Vom Sazu vom Pascal können wir im Sechseck $KB''CIBC''$ schließen, dass die Punkte $B' = KB'' \cap IB$, $X = B''C \cap BC''$ und $S = CI \cap C''K$ kollinear sind. Es sind also die Punkte $S = CI \cap B'X = C'$, C', C'' und K kollinear, und K ist somit der Schnittpunkt von $B'B''$ und $C'C'$, womit gezeigt ist, dass K dasw Zentrum einer zentrischen Streckung ist, die $A'B'C'$ auf $A''B''C''$ abbildet (und dieser Punkt liegt natürlich auch auf Γ, wie gefordert). Die Umkreise berühren sich also, wie behauptet, in diesem Punkt K. qed