Aufgabe 1: Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, so dass die Gleichung

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$$

für alle $x, y \in \mathbf{R}$ gilt. (Hierbei bezeichnet $\lfloor z \rfloor$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als z ist.)

Lösung: Für $x = 0$ erhalten wir aus der gegebenen Beziehung zunächst

$$f(0) = f(0) \cdot \lfloor f(y) \rfloor$$

für alle $y \in \mathbf{R}$. Es gibt also zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall 1: $f(0) \neq 0$.In diesem Fall gilt $\lfloor f(y) \rfloor = 1$ für alle $y \in \mathbf{R}$, und Substitution in der gegebenen Gleichung gibt uns $f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)$. Setzen wir $y = 0$, folgt $f(0) = f(x) = c \neq 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$. Wegen $\lfloor f(x) \rfloor = 1$ gilt $1 \leq c < 2$.

Fall 2: $f(0) = 0$. Wir nehmen zunächst an, es existiere ein α mit $0 < \alpha < 1$ und $f(\alpha) \neq 0$. Dann erhalten wir durch einsetzen von $x = \alpha$ in der gegebenen Beziehung

$$0 = f(0) = f(\alpha) \cdot \lfloor f(y) \rfloor$$

für alle $y \in \mathbf{R}$, und somit $\lfloor f(y) \rfloor = 0$ für alle $y \in \mathbf{R}$. Setzen wir $x = 1$ in der gegebenen Beziehung ein, so erhalten wir dann $f(y) = 0$ für alle $y \in \mathbf{R}$, im Widerspruch zu $f(\alpha) \neq 0$. Es gibt also kein solches α, und es gilt somit $f(\alpha) = 0$ für alle $0 \leq \alpha < 1$. Nun gibt es für jede reelle Zahl z eine ganze Zahl n, sodass $\alpha = \frac{z}{n} \in [0, 1)$ gilt. (z.B. $n = \lfloor z \rfloor + 1$ für $z \geq 0$ und $n = \lfloor z \rfloor - 1$ für $z < 0$). Wählt man $x = n$ und $y = \alpha$, so erhält man aus der gegebenen Beziehung

$$f(z) = f(\lfloor n \rfloor \alpha) = f(n) \cdot \lfloor f(\alpha) \rfloor = 0$$

für alle $x \in \mathbf{R}$.

Wir sehen also, dass nur Funktionen $f(x) = c$ mit $c = 0$ oder $1 \leq c < 2$ die Bedingung erfüllen können. Wegen $0 = 0 \cdot 0$ bzw. $c = c \cdot 1$ erfüllen diese Funktionen tatsächlich die Voraussetzungen.

qed

Aufgabe 2: Das Dreieck ABC habe den Inkreismittelpunkt I und den Umkreis Γ. Die Gerade AI schneide Γ ein zweites Mal im Punkt D. Ferner seien E ein Punkt auf dem Bogen BDC und F ein Punkt auf der Seite $\overline{BC}$ mit

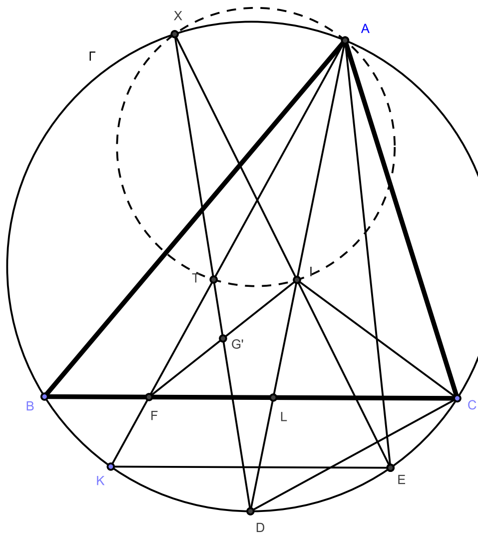
$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \frac{1}{2} \sphericalangle BAC.$$

Schließlich sei G der Mittelpunkt der Strecke $\overline{IF}$. Man beweise, dass sich die Geraden DG und EI auf Γ schneiden.

Lösung: Es seien X der zweite Schnittpunkt von EI mit Γ und L der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale von $\angle BAC$ mit der Seite BC. Ferner seien G' und T die Schnittpunkte von DX mit IF bzw. AF. Wenn wir zeigen können, dass $G = G'$ bzw. $IG' = G'F$ gilt, ist die Behauptung gezeigt. Wenden wir den Satz von Menelaus mit der Geraden DX im Dreieck AIF an, ist also zu zeigen, dass

$$1 = \frac{G'F}{IG'} = \frac{TF}{AT} \cdot \frac{AD}{ID} \quad \text{bzw.} \quad \frac{TF}{AT} = \frac{ID}{AD}$$

gilt.



Wir bezeichnen den zweiten Schnittpunkt von AF mit Γ als K. Wegen $\angle BAK = \angle CAE$ sind die Bögen BK und DE gleich lang, und es gilt somit $KE \| BC$. Wegen

$$\angle IAT = \angle DAK = \angle EAD = \angle EXD = \angle IXT$$

ist $IAXT$ ein Sehnenviereck, und wir haben somit $\angle ITA = \angle IXA = \angle EXA = \angle EKA$, womit auch $IT \| KE \| BC$ gilt. Es folgt somit $\frac{TF}{AT} = \frac{IL}{AI}$.
Da CL die Winkelsymmetrale von $\angle ACL$ ist, gilt $\frac{IL}{AI} = \frac{CL}{AC}$. Außerdem gilt $\angle DCL = \angle DCB = \angle DAB = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC$ womit die Dreiecke DCL und DAC ähnlich sind, womit auch $\frac{DC}{AD} = \frac{ID}{AD}$ gilt.
Zusammen erhalten wir also

$$\frac{TF}{AT} = \frac{IL}{AI} = \frac{CL}{AC} = \frac{DC}{AD} = \frac{ID}{AD},$$

was den Beweis abschließt. qed

Aufgabe 3: Es sei $\mathbf{N}$ die Menge der positiven ganzen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $g: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, so dass die Zahl

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

für alle $m, n \in \mathbf{N}$ eine Quadratzahl ist.

Lösung: Die Funktionen, die diese Bedingung erfüllen, sind genau die Funktionen der Gestalt $g(x) = x + c$, wobei c eine beliebige nicht-negative ganze Zahl ist.
Es ist unmittelbar klar, dass jede Funktion dieser Art die Bedingung erfüllt, da in diesem Fall

$$(g(m) + n)(m + g(n)) = (m + n + c)^2$$

sicher für alle m und n eine Quadratzahl ist. Es bleibt also noch zu zeigen, dass es keine weiteren Funktionen gibt, die diese Bedingung erfüllen. Zu diesem Zweck beweisen wir zunächst das folgende Lemma.
Lemma: Für eine Funktion, die die gegebene Bedingung erfüllt, gelte $p \mid g(k) - g(l)$ für eine Primzahl p Und positive ganze Zahlen k und l. Dann gilt auch $p \mid k - l$.
Beweis des Lemmas: Wir nehmen zunächst an, dass $p^2 \mid g(k) - g(l)$ gilt. Es gilt in diesem Fall also $g(l) = g(k) + p^2 a$ für irgendeine ganze Zahl a. Wir wählen eine beliebige ganze Zahl

D mit $D > \max\{g(k), g(l)\}$, welches nicht durch p teilb ar ist. Dann sind die beiden Zahlen $n+g(k) = pD$ und $n+g(l) = pD+(g(l)-g(k)) = p(D+pa)$ jeweils durch p teilbar, aber nicht durch p^2. Aufgrund der Voraussetzung der Auifgabe wissen wir aber, dass die beiden Zahlen $(g(k)+n)(g(n)+k)$ und $(g(l)+n)(g(n)+l)$ durch p teilbare Quadratzahlen sind, womit sie auch durch p^2 teilbar sind. Somit sind die Faktoren $g(n)+k$ und $g(n)+l$ jeweils ebenfalls durch p teilbar, und somit gilt auch $p|((g(n)+k)-(g(n)+l)) = k-l$.

Ist andererseits $g(k)-g(l)$ durch p teilbar, aber nicht durch p^2, wählen wir dieselbe Zahl D und setzen $n = p^3D - g(k)$. Dann sind die Zahlen $g(k)+n = p^3D$ und $g(l)+n = p^3D+(g(l)-g(k))$ jeweils durch p^3 (aber nicht durch p^4 teilbar. Wir erhalten also auf analoge Art und Weise, dass die Zahlen $g(n)+k$ und $g(n)+l$) durch p teilbar sind, womit wiederum $p|((g(n)+k)-(g(n)+l)) = k-l$ gilt. Die Gültigkeit des Lemmas ist also damit gezeigt.

Nun bemerken wir, dass die Funktion g injektiv sein muss. Gilt nämlich $g(k) = g(l)$ für irgendwelche $k, l \in \mathbf{N}$, erhalten wir aus dem Lemma, dass $k-l$ durch jede Primzahl teilbar sein muss, was nur im Fall $k-l = 0 \iff k = l$ möglich ist. Ferner erkennen wir, dass $|g(k+1)-g(k)| = 1$ ebenfalls aus dem Lemma folgen muss, da $(k+1)-k = 1$ keine Primteiler besitzt, womit auch $g(k+1)-g(k)$ keine Primteiler besitzen kann.

Wir sind also mit diesem Werkzeug bereit, den Beweis der Behauptung durchzuführen. Wir definieren zunächst $g(2)-g(1) = q$ mit $|q| = 1$. Wir können nun mittels vollständiger Induktion zeigen, dass $g(n) = g(1)+q(n-1)$ gilt. Dies ist offensichtlich richtig für $n = 1, 2$ und für $n > 1$ gilt $g(n+1) = g(n) \pm q = g(1)+q(n+1) \pm q$. Da sicher $g(n+1) \neq g(n-1) = g(1)+q(n-2)$ gilt, erhalten wir also $g(n+1) = g(1)+qn$, was die Induktion abschließt. Wäre nun $q = -1$, hätten wir für $n \geq g(1)+1$ immer $g(n) \leq 0$, was der Voraussetzung für g widerspricht. Es gilt also $g(n) = g(1)+(n-1) \iff g(n) = n+(g(1)-1)$, womit wir sehen, dass g sicher von der Gestalt $g(n) = n+c$ ist. qed

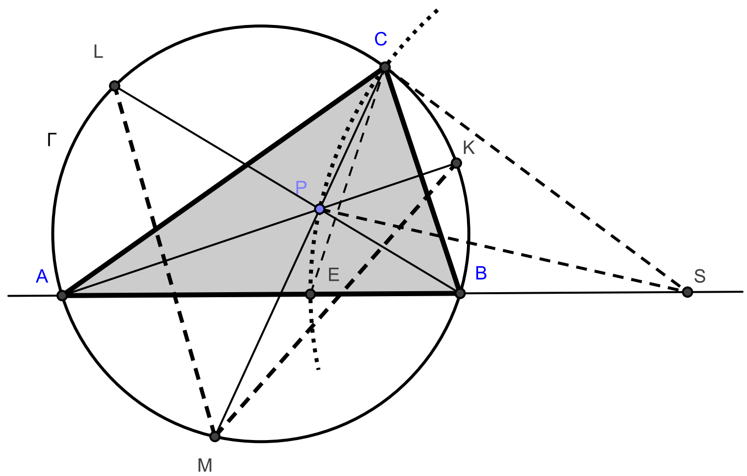
Aufgabe 4: Im Inneren des Dreiecks ABC liege der Punkt P. Die Geraden AP, BP und CP schneiden den Umkreis Γ von ABC jeweils ein zweites Mal in den Punkten K, L bzw. M. Die Tangente an Γ durch C schneide die Gerade AB in S. Es gelte $|\overline{SC}| = |\overline{SP}|$.
Man beweise $|\overline{MK}| = |\overline{ML}|$.

Lösung: Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $CA > CB$ gilt. In diesem Fall liegt der Punkt S auf dem Strahl AB.

Zunächst bemerken wir, dass die Dreiecke PKM und PCA ähnlich sind, Dies folgt sofort aus der Gleichheit der Scheitelwinkel $\angle KPM$ und $\angle APC$ und der Peripheriewinkel $\angle KMC = \angle KMP$ und $\angle KAC = \angle PAC$. Hieraus folgt also $\frac{PM}{KM} = \frac{PA}{CA}$. Analog sind auch die Dreiecke PLM und PCB ähnlich, und hieraus folgt $\frac{LM}{PM} = \frac{CB}{PB}$. Diese beiden Beziehungen ergeben zusammen

$$\frac{PM}{KM} \cdot \frac{LM}{PM} = \frac{LM}{KM} = \frac{CB}{PB} \cdot \frac{PA}{CA},$$

und wir sehen, dass die nachzuweisende Beziehung $MK = ML$ gleichwertig ist mit $\frac{CB}{CA} = \frac{PB}{PA}$.
Nun bemerken wir, dass die Eigenschaft $SC = SP$ zur Folge hat, dass C und P beide auf demselben Kreis mit Mittelpunkt S liegen, und dass S auf der Tangente an den Umkreis von ABC durch C liegt. Es ist also klar, dass S der Mittelpunkt eines Kreises durch C und P ist. Die Eigenschaft $\frac{CB}{CA} = \frac{PB}{PA}$ erinnert uns aber sofort an die Defintion des Appoloniuskreises bezüglich des Umkreises eines Dreiecks ABC; dieser besteht ja genau aus der Menge aller Punkte X, für die $\frac{CB}{CA} = \frac{XB}{XA}$ gilt. Da wir nun wissen, dass die Eigenschaft $MK = ML$ gleichwertig damit ist, dass P auf dem Appoloniuskreis des Umkreises von ABC liegt, bleibt nur zu zeigen, dass S der Mittelpunkt dieses Appoloniuskreises ist.



Sei zu diesem Zweck E der Schnittpunkt von AB mit der Winkelsymmetrale von $\angle ACB$. Dieser liegt sicher auf dem Appoloniuskreis. Nun gilt

$$\angle CES = \angle CAE + \angle ACE = \angle BCS + \angle ECB = \angle ECS,$$

und somit auch $SC = SE$. S ist also der Schnittpunkt von $[AB]$ mit der Streckensymmetrale von EC, und dies ist genau der Mittelpunkt des Appoloniuskreises. qed

Aufgabe 5: In jedem von sechs Behältern B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 und B_6 befindet sich zu Beginn genau eine Münze. Es gibt zwei Typen von erlaubten Operationen:

Typ 1: Man wähle einen nicht-leeren Behälter B_j mit $1 \leq j \leq 5$ aus. Man entferne eine Münze aus B_j und füge zum Behälter B_{j+1} zwei Münzen hinzu.

Typ 2: Man wähle einen nicht-leeren Behälter B_k mit $1 \leq k \leq 4$ aus. Man entferne eine Münze aus B_k und vertausche die Inhalte der (möglicherweise leeren) Behälter B_{k+1} und B_{k+2}.

Man entscheide, ob es eine endliche Folge von solchen Operationen gibt, nach deren Ausführung die ersten fünf Behälter B_1, B_2, B_3, B_4 und B_5 leer sind und der sechste Behälter B_6 genau $2010^{2010^{2010}}$ Münzen enthält. (Man beachte: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Lösung: Wir verwenden die Notation $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \to (b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)$ um anzudeuten, dass eine Folge erlaubter Operationen die n aufeinanderfolgenden Behälter von der linken Belegung zur rechten verändern, während die übrigen Behälter ihre Inhalte durch diese Operationen nicht ändern.
Es sei $A = 2010^{2010^{2010}}$. Wir wollen zeigen, dass

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1) \to (0, 0, 0, 0, 0, A)$$

möglich ist. Wir beweisen zunächst zwei vorberitende Hilfssätze.
Lemma 1: $(a, 0, 0) \to (0, 2^a, 0)$ für alle $a \geq 1$.
Beweis von Lemma 1: Wir zeigen mittels vollständiger Induktion, dass $(a, 0, 0) \to (a - k, 2^k, 0)$ für alle $1 \leq k \leq a$. Für $k = 1$ führen wir eine Operartion vom Typ 1 aus, und erhalten

$$(a, 0, 0) \to (a - 1, 2, 0) = (a - 1, 2^1, 0).$$

Nehmen wir also an, es gelte die Behauptung für ein bestimmtes $k < a$, also $(a,0,0) \to (a-k, 2^k, 0)$. Führen wir zunächst diese Operationsfolge aus, dann 2^k vom Typ 1 an der zweiten Stelle, und anschließend eine vom Typ 2 an der ersten Stelle, erhalten wir

$$(a-k, 2^k, 0) \to (a-k, 2^k-1, 2) \to \ldots \to (a-k, 0, 2^{k+1}) \to (a-k-1, 2^{k+1}, 0),$$

also

$$(a,0,0) \to (a-k, 2^k, 0) \to (a-(k+1), 2^{k+1}, 0).$$

Lemma 2: Es sei für eine positive ganze Zahl n P_n der Potenzturm bestehend aus n Mal die Zahl 2 (z.B. $P_3 = 2^{2^2} = 16$). Dann gibt es eine Folge erlaubter Operationen mit $(a,0,0,0) \to (0, P_a, 0, 0)$ für jedes $a \geq 1$.

Beweis von Lemma 2: Analog zum Beweis von Lemma 1 beweisen wir mittels Induktion, dass $(a,0,0,0) \to (a-k, P_k, 0, 0)$ für jedes $1 \leq k \leq a$ möglich ist.

Für $k = 1$ ergibt eine Operation vom Typ 1 an der ersten Stelle

$$(a,0,0,0) \to (a-1, 2, 0, 0) = (a-1, P_1, 0, 0).$$

Wir nehmen also anl, dass die Behauptung für ein bestimmtes $k < a$ gilt. Ausgehend von $(a-k, P_k, 0, 0)$ erhalten wir durch Anwendung von Lemma 1 und anschließender Operation vom Typ 1 an der ersten Stelle

$$(a-k, P_k, 0, 0) \to (a-k, 0, 2^{P_k}, 0) = (a-k, 0, P_{k+1}, 0) \to (a-k-1, P_{k+1}, 0, 0),$$

und somit insgesamt

$$(a,0,0,0) \to (a-k, P_k, 0, 0) \to (a-(k+1), P_{k+1}, 0, 0).$$

Jetzt können wir die möglichen Operationsfolgen anwenden, um die erwünschte Situation herzustellen.

Durch Operationen vom Typ 1 an fünfter Stelle, Operationen vom typ 2 an vierter, dritter, zweiter und erster Stelle (in dieser Reihenfolge), und anschließender zweimaliger Anwendung von Lemma 2 erhalten wir

$$(1,1,1,1,1,1) \to (1,1,1,1,0,3) \to (1,1,1,0,3,0) \to (1,1,0,3,0,0), \to (1,0,3,0,0,0) \to$$

$$\to ((0,3,0,0,0,0) \to (0,0,P_3,0,0,0) = (0,0,16,0,0,0) \to (0,0,0,P_{16},0,0).$$

Im Behälter B_4 befinden sich nun schon mehr als A Münzen, denn es gilt

$$A = 2010^{2010^{2010}} < (2^{11})^{2010^{2010}} = 2^{11 \cdot 2010^{2010}} < 2^{2010^{2011}} < 2^{(2^{11})^{2011}} = 2^{2^{11 \cdot 2011}} < 2^{2^{2^{15}}} < P_{16}.$$

Um die Zahl der Münzen zu verringern, kann man jeweils eine Operation vom Typ 1 an dieser Stelle durchführen, da siese Operation die Zahl an dieser Stelle um 1 verringert und die beiden folgenden leeren Behälter austauscht. Wir haben also

$$(0,0,0,P_{16},0,0) \to (0,0,0,P_{16}-1,0,0) \to \ldots \to (0,0,0,\frac{A}{4},0,0).$$

Schließlich führe wir nur mehr Operationen vom Typ 2 aus, und erhalten

$$(0,0,0,\frac{A}{2},0,0) \to (0,0,0,0,\frac{A}{2},0) \to (0,0,0,0,0,A).$$

qed

Aufgabe 6: Es sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Ferner sei s eine positive ganze Zahl, so dass

$$a_n = \max\{\, a_k + a_{n-k} \mid 1 \le k \le n-1 \,\}$$

für alle $n > s$ gilt. Man beweise, dass es positive ganze Zahlen N und ℓ mit $\ell \le s$ derart gibt, dass $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ für alle $n \ge N$ gilt.

Lösung: Aus der Definition der a_n wissen wir, dass jedes a_n (für $n > s$) in der Form $a_n = a_{j_1} + a_{j_2}$ mit $j_1, j_2 < n$ und $j_1 + j_2 = n$ ausgedrückt werden kann. Gilt nun etwa $j_1 > s$, so können wir auf gleiche Weise mit a_{j_1} verfahren, usw. Wir können also schließlich a_n in der Form

$$a_n = a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}$$

mit $1 \le i_j \le s$ und $i_1 + \ldots + i_k = n$ schreiben. Wählen wir die Indizes i_1 und i_2 so, dass sie die aus dem letzten Schritt waren, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $i_1 + i_2 > s$ gilt, und wir haben somit $1 \le i_j \le s$, $i_1 + \ldots + i_k = n$ und $i_1 + i_2 > s$.

Nehmen wir nun andererseits an, dass Indizes $i_1, \ldots i_k$ diesen drei Bedingungen genügen. Schreiben wir $s_j = i_1 + \ldots + i_j$, so gilt in diesem Fall

$$a_n = a_{s_k} \ge a_{s_{k-1}} + a_{i_k} \ge a_{s_{k-2}} + a_{i_{k-1}} + a_{i_k} \ge \ldots \ge a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}.$$

Zusammen erhalten wir also

$$a_n = \max\{a_{i_1} + \ldots + a_{i_k} :\ 1 \le i_j \le s,\ i_1 + \ldots + i_k = n \text{ und } i_1 + i_2 > s\}.$$

Nun schreiben wir

$$t := \max_{1 \le i \le s} \frac{a_i}{i},$$

und bezeichnen als ℓ einen Index $\ell \le s$, für den $t = \frac{a_\ell}{\ell}$ gilt. Wir wählen einen Index n mit $n \ge s^2\ell + 2s$ und wählen eine Darstellung von a_n mit den oben beschriebenen Indizes $i_1, \ldots, i_k$. Für diese Wahl gilt $n = i_1 + \ldots + i_k \le sk$, und somit $k \ge \frac{n}{s} \ge s\ell + 2$. Nehmen wir an, keine der Indizes $i_3, \ldots, i_k$ sei gleich ℓ. Dann gibt es nach dem Schubfachprinzip einen Index $1 \le j \le s$, der unter den Indizes $i_3, \ldots, i_k$ mindestens ℓ Mal vorkommt, und es gilt dabei sicher $j \ne \ell$. Wir können also die ℓ Indizies j aus dem Vektor $(i_1, \ldots, i : k)$ löschen und durch j Indizes ℓ ersetzen, wodurch wir einen neuen Indexvektor $(i_1, i_2, i'_3, \ldots, i'_{k'})$ erhalten, der ebenfalls die Bedingungen erfüllt. Aufgrund der Mengeneigenschaft gilt

$$a_{i_1} + \ldots + a_{i_k} = a_n \ge a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i'_3} + \ldots + a_{i'_{k'}},$$

was nach dem Entfernen gleicher Summanden die Beziehung $\ell a_j \ge j a_\ell$ ergibt, also $\frac{a_\ell}{\ell} \le \frac{a_j}{j}$. Nach der Definition von ℓ bedeutet dies aber, dass $\ell a_j = j a_\ell$ gilt, und somit auch

$$a_n = a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i'_3} + \ldots + a_{i'_{k'}}.$$

Für jedes $n \ge s^2\ell + 2s$ haben wir somit eine Darstellung der notwenigen Gestalt mit $i_j = \ell$ für irgendein $j \ge 3$. Durch Umordnen der Indizes können wir sicherstellen, dass $i_k = \ell$ gilt.

In dieser Darstellung erfüllen die Indizes $(i_1, \ldots, i_{k-1})$ die notwendigen Bedingungen, wenn n durch $n - \ell$ ersetzt wird. Es gilt also

$$a_{n-\ell} + a_\ell \ge (a_{i_1} + \ldots + a_{i_{k-1}}) + a_\ell = a_n,$$

woraus aber

$$a_n = a_{n-\ell} + a_\ell$$

für alle $n \ge s^2\ell + 2s$ folgt, wie behauptet. qed