Aufgabe 1

Es seien n und k positive ganze Zahlen mit $k \geq 2$. Ferner seien $a_1, \ldots, a_k$ paarweise verschiedene ganze Zahlen aus der Menge $\{1, \ldots, n\}$ derart, dass n die Zahl $a_i(a_{i+1} - 1)$ für jedes $i = 1, \ldots, k-1$ teilt. Man zeige, dass dann n die Zahl $a_k(a_1 - 1)$ nicht teilt.

Lösung: Da jeweils n die Zahlen $a_i(a_{i+1} - 1)$ für $i = 1, \ldots, k-1$ teilt, gilt für diese Indizes auch jeweils $a_i \equiv a_i a_{i+1} \pmod{n}$. Nehmen wir nun an, dass auch

$$n \,|a_k(a_1 - 1) \iff a_k \equiv a_k a_1 \pmod{n}$$

gilt, erhalten wir für jeden Index $i = 1, \ldots, k-1$

$$a_i \equiv a_i a_{i+1} \equiv a_i a_{i+1} a_{1+2} \equiv \ldots \equiv a_i \ldots a_k \equiv \ldots \equiv a_i \ldots a_{i-1} = a_1 \ldots a_k \pmod{n},$$

und somit

$$a_1 \equiv a_2 \equiv \ldots \equiv a_k \equiv a_1 \ldots a_k \pmod{n},$$

was aber

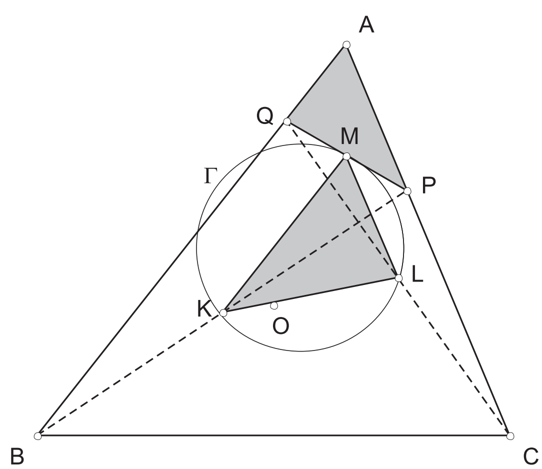
$$a_1 = a_2 = \ldots = a_k$$

zur Folge hat, was ein Widerspruch ist. Es kann somit wie behauptet n nicht die Zahl $a_k(a_1 - 1)$ teilen. qed

Aufgabe 2

Es sei ABC ein Dreieck mit Umkreismittelpunkt O. Es seien P und Q innere Punkte der Seiten CA und AB. Ferner seien K, L und M die Mittelpunkte der Strecken BP, CQ bzw. PQ. Der Kreis Γ gehe durch K, L und M. Die Gerade PQ sei Tangente an den Kreis Γ. Man zeige, dass $|OP| = |OQ|$ gilt.

Lösung:



Zunächst bemerken wir, dass ML durch zentrische Streckung aus Q mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ aus PC hervorgeht, und dass somit sicher $CA \| LM$ gilt, und somit $\angle LMP = \angle QPA$. Da Γ die Strecke PQ in M berührt gilt auch $\angle LMP = \angle LKM$, und somit folgt $\angle QPA = \angle LKM$. Analog gilt auch $AB \| MK$ und somit $\angle PQA = \angle KMQ = \angle KLM$, und es folgt, dass die Dreiecke APQ und MKL ähnlich sind. Somit folgt also

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{MK}{ML} = \frac{\frac{QB}{2}}{\frac{PC}{2}} = \frac{QB}{PC}.$$

Wir erhalten $AP \cdot PC = AQ \cdot QB$, und die Potenz der Punkte P und Q bezüglich des Umkreises von ABC ist somit gleich, woraus $OP = OQ$ folgt. qed

Aufgabe 3

Es sei $s_1, s_2, s_3, \ldots$ eine streng monoton wachsende Folge positiver ganzer Zahlen derart, dass die beiden Teilfolgen

$$s_{s_1},\ s_{s_2},\ s_{s_3},\ \ldots \quad \text{und}\ s_{s_1+1},\ s_{s_2+1},\ s_{s_3+1},\ \ldots$$

jeweils arithmetische Folgen sind. Man zeige, dass $s_1, s_2, s_3, \ldots$ ebenfalls eine arithmetische Folge ist.

Lösung: Es sei D die Differenz der arithmetischen Folge $s_{s_1},\ s_{s_2},\ s_{s_3},\ \ldots$. Für beliebige Indizes n definieren wir

$$d_n := s_{n+1} - s_n.$$

Unser Ziel ist es, nachzuweisen, dass die Folge der d_n konstant ist. Nun ist es aufgrund der strengen Monotonie der Folge der s_n klar, dass $d_n \geq 1$ für alle Indizes n gelten muss. Daraus folgt aber für alle Indizes n auch

$$d_n = s_{n+1} - s_n \leq d_{s_n} + s_{s_n+1} + \ldots + d_{s_{n+1}-1} = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = D.$$

Wir sehen also, dass die Menge der Zahlen d_n beschränkt ist. Aufgrund dieser Beschränktheit existieren sicherlich die Zahlen

$$m = \min\{d_n |\ n = 1, 2, \ldots\} \qquad \text{und} \qquad M = \max\{d_n |\ n = 1, 2, \ldots\}.$$

Es genügt nun zu zeigen, dass $m = M$ gilt.

Nehmen wir an, dass $m < M$ gelte. In diesem Fall wählen wir den Index n so, dass $d_n = m$ gilt. Für diesen Wert $m = d_n = s_{n+1} - s_n$ gilt dann

$$D = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = s_{s_n+m} - s_{s_n} = d_{s_n} + d_{s_n+1} + \ldots + d_{s_n+m-1} \leq mM,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn alle Summanden gleich M sind.

Nun wählen wir den Index n so, dass $d_n = M$ gilt. Für diesen Wert $M = d_n = s_{n+1} - s_n$ gilt

$$D = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = s_{s_n+M} - s_{s_n} = d_{s_n} + d_{s_n+1} + \ldots + d_{s_n+M-1} \geq mM,$$

wobei in diesem Fall Gleichheit genau dann gilt, wenn alle Summanden gleich m sind. Beide Ungleichungen ergeben also zusammen $D = mM$ und wegen der Gleichheit in beiden Fällen gilt

$$d_{s_n} = d_{s_n+1} = \ldots = d_{s_{n+1}-1} = M \quad \text{wenn} \quad d_n = m,$$

und

$$d_{s_n} = d_{s_n+1} = \ldots = d_{s_{n+1}-1} = m \quad \text{wenn} \quad d_n = M.$$

Aus $d_n = m$ folgt also $d_{s_n} = M$. Nun bemerken wir, dass $s_n \geq s_1 + (n-1) \geq n$ für alle n gilt. Darüber hinaus muss $s_n > n$ für $d_n = m$ gelten, da $s_n = n$ sicher $m = d_n = d_{s_n} = M$ zur Folge hätte, im Widerspruch zur Annahme $m < M$. Auf ähnliche Art folgt aus $d_n = M$ aber auch $d_{s_n} = m$ und $s_n < n$. Es existiert also eine monoton steigende Folge $n_1, n_2, n_3, \ldots$, sodass

$$d_{s_{n_1}} = M, \quad d_{s_{n_2}} = m, \quad d_{s_{n_3}} = M, \quad d_{s_{n_4}}, \ldots$$

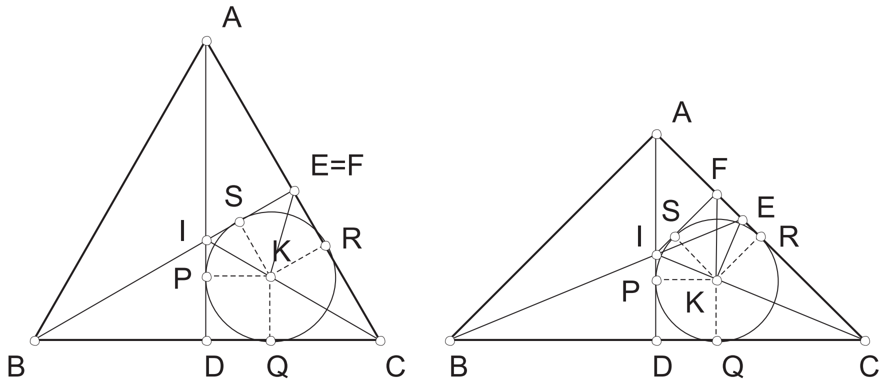
gilt. Die Folge $d_{s_1}, d_{s_2}, \ldots$ ist aber die Folge der paarweisen Differenzen von $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, \ldots$ und $s_{s_1}, s_{s_2}, \ldots$, und somit eine arithemtische Folge. Es folgt also wie erwünscht $m = M$. qed

Aufgabe 4

Es sei ABC ein Dreieck mit $|AB| = |AC|$. Die Innenwinkelhalbierenden der Winkel BAC und CBA schneiden die Seiten BC und AC in den Punkten D bzw. E. Es sei K der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ADC. Ferner sei $\sphericalangle BEK = 45°$. Man bestimme alle möglichen Werte von $\sphericalangle BAC$.

Lösung: Wir zeigen, dass entweder $\sphericalangle BAC = 60^o$ oder $\sphericalangle BAC = 90^o$ gelten muss.

Sei I der Inkreismittelpunkt von ABC. Da sowohl K als auch I auf der Winkelsymmetrale von $\sphericalangle ACB$ liegen, liegt K auf der Strecke CI. Sei F der Berührpunkt des Inkreises von ABC mit der Seite AC. Da D der Berührpunkt dieses Kreises mit BC ist, sind die Strecken IF und ID beide an Inkreisradien gleich lang. Die Dreiecke ICD und ICF sind also kongruent.



Nun seien P, Q und R die Berührpunkte des Inkreises von ADC mit den Seiten AD, DA bzw. AC. Da K und I auf der Winkelsymmetrale von $\sphericalangle ACD$ liegen, sind die Strecken ID und IF symmetrisch bezüglich der Geraden IC. Es gibt also einen Berührpunkt S der Strecke IF mit diesem Inkreis. Die Strecken KP, KQ, KR und KS sind also alle gleich lang und stehen der Reihe nach normal zu AD, DC, CA bzw. IF. Unabhängig vom Winkel $\sphericalangle BEK$ ist also das Viereck $KRFS$ ein Quadrat, und es gilt $\sphericalangle SFK = \sphericalangle KFC = 45^o$.

Nun betrachten wir zuerst den Fall $\sphericalangle BAC = 60^o$. In diesem Fall ist das Dreieck ABC gleichseitig. Es gilt sicher $F = E$, und wir haben somit in diesem Fall $\sphericalangle BEK = \sphericalangle IFK = \sphericalangle SEK = 45^o$. Es ist also 60^o ein möglicher Wert des Winkels $\sphericalangle BAC$.

Als nächstes betrachten wir den Fall $\sphericalangle BAC = 90^o$. In diesem Fall haben wir

$$\sphericalangle CBA = \sphericalangle ACB = 45^o.$$

Weiters gelten in diesem Fall $\sphericalangle KIE = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle CBA + \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle ACB = 45^o$, $\sphericalangle AEB = 180^o - 90^o - 22,5^o = 67,5^o$ und $\sphericalangle EIA = \sphericalangle BID = 180^o - 90^o - 22,5^o = 67,5^o$. Das Dreieck IEA ist also gleichschenkelig, und eine Spiegelung des Dreiecks an der Achse AK (der Winkelsymmetralen von $\sphericalangle IAE$) vertauscht I und E und läßt K fix. Es gilt also $\sphericalangle KIE = \sphericalangle IEK = \sphericalangle BEK = 45^o$, womit wir erkennen, dass 90^o auch ein möglicher Wert des Winkels $\sphericalangle BAC$ ist.

Es bleibt nun zu zeigen, dass kein anderer Wert als 60^o und 90^o in Frage kommt. Es gilt ja $\sphericalangle BEK = 45^o$ und $\sphericalangle BEK = \sphericalangle IEK = \sphericalangle IFK = 45^o$. Nun gibt es drei Möglichkeiten.

- Es kann $F = E$ gelten. In diesem Fall ist die Winkelsymmetrale BI eine Höhe des Dreiecks ABC. Das bedeutet aber, das $BC = BA$ gilt, und es muss somit das Dreieck ABC gleichseitig sein. In diesem Fall gilt also $\angle BAC = 60^o$.

- Es kann auch E zwischen F und C liegen. In diesem Fall liegen die Punkte K, E, F und I auf einem gemeinsamen Kreis. Somit gilt

$$45^o = \sphericalangle KFC = \sphericalangle KFE = \sphericalangle KIE = \sphericalangle CBI + \sphericalangle ICB = 2 \cdot \sphericalangle ICB = 90^o - \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BAC,$$

und daher $\sphericalangle BAC = 90^o$.

- Schließlich kann auch F zwischen E und C liegen. Wieder liegen K, E, F und I auf einem gemeinsamen Kreis und es gilt $45^o = \sphericalangle KFC = 180^o - \sphericalangle KFE = \sphericalangle KIE$, woraus wieder $\sphericalangle BAC = 90^o$ folgt, was aber bedeutet, dass E zwischen F und C liegt. Dieser Fall ist also nicht möglich.

Wir sehen, dass es tatsächlich nur die beiden Lösungen $\sphericalangle BAC = 60^o$ und $\sphericalangle BAC = 90^o$ gibt.

qed

Aufgabe 5

Man bestimme alle Funktionen f, die auf der Menge der positiven ganzen Zahlen definiert sind und nur positive ganze Zahlen als Werte annehmen, so dass es für alle positiven ganzen Zahlen a und b ein nicht ausgeartetes Dreieck mit Seitenlängen

$$a,\ f(b) \text{ und } f(b + f(a) - 1)$$

gibt.
(Ein Dreieck heißt *nicht ausgeartet*, wenn seine Eckpunkte nicht kollinear sind.)

Lösung: Wir wollen zeigen, dass $f(x) = x$ als einzige Funktion diese Eigenschaft besitzt.

Zunächst gilt die Eigenschaft sicher für diese Funktion, da die drei Werte in diesem Fall a, $f(b) = b$ und $f(b + f(a) - 1) = a + b - 1$ sind. Diese (ganzzahligen) Werte sind sicher die Seitenlängen eines Dreiecks, da wegen $a, b \geq 1$ sicher $a + b - 1 \geq a$ bzw $a + b - 1 \geq b$ gelten, und somit sowohl $a + (a + b - 1) > b$ als auch $b + (a + b - 1) > a$. Ebenso gillt offensichtlich $a + b > a + b - 1$, und die Funktion $f(x) = x$ hat somit die gewünschte Eigenschaft.

Nun bleibt zu zeigen, dass keine weitere Funktion diese Eigenschaft hat. Sei zu diesem Zweck $f(x)$ eine beliebige Funktion mit der gewünschten Eigenschaft. Wir teilen den Beweis in mehe-rere Schritte.

Schritt 1: Wir zeigen, dass $f(1) = 1$ gilt.

Wäre $f(1) = 1 + m > 1$, so setzen wir $a = 1$, und sehen, dass $f(b) = f(b + m)$ für alle b gelten müsste, da es stets ein Dreieck mit den Seitenlängen 1, $f(b)$ und $f(b + f(1) - 1) = f(b + m)$ gibt. Die Funktion f wäre also periodisch mit der Periodenlänge m und somit beschränkt. Ist aber B eine obere Schranke der Funktion (also $f(a) \leq B$ für alle a), so wiederspräche dies der Existenz eines Dreiecks mit den Seitenlängen a (mit a beliebig größer als $2B$), $f(b) < B$ und $f(b + f(a) - 1) < B$. Es gilt also sicher $m = 0$, und somit $f(1) = 1$.

Schritt 2: Wir zeigen, dass $f(f(c)) = c$ für alle $c \geq 1$ gilt.

Dies folgt unmittelbar, wenn wir $a = c$ und $b = 1$ setzen, da wir ein Dreieck mit den Seitenlängen c, 1 und $f(f(c))$ erhalten.

Schritt 3: Wir zeigen, dass $f(c) \leq c$ für alle $c \geq 1$ gilt.

Wir nehmen das Gegenteil an, also $d + 1 = f(c) > c$ für irgendein c. Wegen $f(1) = 1$ gilt dann sicher $d \geq c \geq 2$. Es sei $M = \max\{f(1), f(2), \ldots, f(d)\}$. Wir zeigen zuerst, dass es kein positives t gibt, sodass

$$f(t) > \frac{c-1}{d} \cdot t + M$$

gilt, da wir ansonsten das kleinste t in der Form $t = dr + s$ schreiben können, wobei r ganzzahlig ist und $1 \leq s \leq d$. Aufgrund der Defintion von M gilt $t > d$. Setzen wir $x = c$ und $y = t - d$, erhalten wir aus der Dreiecksungleichung

$$c + f(t - d) > f((t - d) + f(c) - 1) = f(t - d + d) = f(d).$$

Somit gilt aber

$$f(t-d) \geq f(t) - (c-1) > \frac{c-1}{d} \cdot (t-d) + M,$$

was der Definition von M als kleinste Zahl mit dieser Eingenschaft widerspricht.

Aufgrund dieses Widerspruchs gilt also

$$f(t) \leq \frac{c-1}{d} \cdot t + M$$

für alle $t \geq 1$.

Mit dieser Eigenschaft können wir nun den Schritt 3 abschließen. Wegen $c \leq d$ gilt $\frac{c-1}{d} < 1$, und wir können somit eine hinreichend große ganze Zahl t so wählen, dass die Bedingung

$$\left(\frac{c-1}{d}\right)^2 \cdot t + \left(\frac{c-1}{d} + 1\right) \cdot M < t$$

erfüllt ist. Somit gilt aber

$$f(f(t)) \leq \frac{c-1}{d} \cdot f(t) + M \leq \frac{c-1}{d} \cdot \left(\frac{c-1}{d} \cdot t + M\right) < t,$$

was einen Widerspruch zu schritt 2 ergibt. Dies beendet also den Beweis von Schritt 3.

Schritt 4: Es gilt nun also abschließend

$$c = f(f(c)) \leq f(c) \leq c,$$

und somit $f(c) = c$ für alle positiven ganzen zahlen c, wie behauptet. qed

Aufgabe 6

Es seien n eine positive ganze Zahl, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ paarweise verschiedene positive ganze Zahlen und M eine Menge von $n-1$ positiven ganzen Zahlen, die nicht die Summe $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ als Element enthält. Ein Grashüpfer springt längs der reellen Zahlengerade. Er startet im Nullpunkt und vollführt n Sprünge nach rechts mit Längen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in beliebiger Reihenfolge. Man zeige, dass der Grashüpfer seine Sprünge so anordnen kann, dass er nie auf einem Punkt aus M landet.

Lösung: Zunächst bemerken wir, dass die Bedingung $|M| = n$ durch die etwas lockerere Bedingung $|M \cap (0, s - \overline{a}]| \leq n$ mit $\overline{a} = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ ersetzt werden kann.

Wir beweisen nun die Behauptung durch Induktion. Der Fall $n = 0$ ist offensichtlich. Sei also $n > 0$ und gelte die Behauptung füe alle nichtnegativen ganzen Zahlen kleiner als n. Ferner seien $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}, s$ und M wie in der Angabe definiert. o.B.d.A. gelte $a_{n+1} < a_n < \ldots < a_2 < a_1$. Wir definieren

$$T_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Dabei bemerken wir, dass $0 = T_0 < T_1 < \ldots < t_{n+1} = s$ gilt. Wir nutzen nun die Induktionsannahme auf folgende Art:

Behauptung 1: Es genügt zu zeigen, dass es ein $m \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ gibt, sodass der Grashüpfer mindestens m Sprünge machen kann, ohne auf einem Punkt von M zu landen, und dass er nach diesen m Sprüngen über mindestens m Punkten aus M gesprungen ist.

Beweis: Wegen $|M| = n$ ist $m = n + 1$ unmöglich. Setzen wir also $n' = n - m$. Dann gilt sicher $0 \leq n' < n$. Die restlichen $n' + 1$ Sprünge können nun nach der Induktionsannahme mit

Hilfe einer Verschiebung des Ausgangspunktes ohne auf einen der höchstens n' verbliebenen verbotenen Punkte zu landen ausgeführt werden. Dies zeigt die Gültigkeit der Behauptung 1.

Wir bezeichnen eine positive ganze Zahl $k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ als *glatt*, wenn der Grashüpfer genau k Sprünge der Längen $a_1, a_2, \dots a_k$ so ausführen kann, dass er niemals auf einem Punkt von M landet, mit Ausnahme des letzten Sprunges, nach dem er auf einem Punkt von M landen darf.

Offensichtlich ist 1 glatt. Es gibt also eine größte Zahl k^*, sodass die Zahlen $1, 2, \dots, k^*$ glatt sind. Wenn $k^* = n+1$ gilt, ist der Beweis fertig. Wir nehmen also in der Folge $k^* \leq n$ an.

Behauptung 2: Es gilt

$$T_{k^*} \in M \quad \text{und} \quad |M \cap (0, T_{k^*})| \geq k^*.$$

Beweis: Falls $T_{k^*} \notin M$ gilt, kann jede Sprungfolge, die die Glattheit von k^* bestätigt durch Erweiterung um a_{k^*+1} verlängert werden, was ein Widerspruch zur Tatsache ist, dass k^* maximal ist. Es gilt also $T_{k^*} \in M$. Gilt $|M \cap (0, T_{k^*})| < k^*$, so gibt es ein $l \in \{1, 2, \dots, k^*\}$ mit $T_{k^*+1} - a_l \notin M$. Nach der Induktionsannahme (mit $k^* - 1$ für n) kann der Grashüpfer $T_{k^*+1} - a_l$ mit k^* Sprüngen der Längen $\{a_1, a_2, \dots, a_{k^*+1}\} \backslash \{a_l\}$ erreichen, ohne auf einem Punkt von M zu landen. Das bedeutet aber, dass $k^* + 1$ galtt ist, im Widerspruch zur Maximalität von k^*. Dies zeigt die Gültigkeit der Behauptung 2.

Nach Behauptung 2 existiert also eine kleinste Zahl $\overline{k} \in \{1, 2, \dots, k^*\}$ mit

$$T_{\overline{k}} \in M \quad \text{und} \quad |M \cap (0, T_{\overline{k}})| \geq \overline{k}.$$

Behauptung 3: Es genügt, den Fall

$$|M \cap (0, T_{\overline{k}-1})| \leq \overline{k} - 1$$

zu betrachten.

Beweis: Im Fall $\overline{k} = 1$ gilt offensichtlich $|M \cap (0, T_{\overline{k}-1})| \leq \overline{k} - 1$. Im Folgenden setzen wir also jeweils $\overline{k} > 1$ voraus. Wenn $T_{\overline{k}-1} \in M$ gilt, dann folgt $|M \cap (0, T_{\overline{k}-1})| \leq \overline{k} - 1$ unmittelbar aus der Minimalität von $\overline{k}$. Wenn $T_{\overline{k}-1} \notin M$ gilt, so erhält man wegen der Glattheit von $\overline{k} - 1$ eine Situation wie in Behauptung 1 mit $m = \overline{k} - 1$, wenn $|M \cap (0, T_{\overline{k}-1})| \geq \overline{k} - 1$ gilt. In diesem Fall können wir uns sogar auf den Fall $|M \cap (0, T_{\overline{k}-1})| \leq \overline{k} - 2$ beschränken, und die Gültigkeit der Behauptung 3 ist gezeigt.

Wir wählen nun eine ganze Zahl $v \geq 0$ mit $|M \cap (0, T_{\overline{k}-1})| = \overline{k} + v$. Seien $r_1 > r_2 > \dots > r_l$ genau die Indizes r aus $\{\overline{k} + 1, \overline{k} + 1, \dots, n+1\}$ für die $T_{\overline{k}} + a_r \notin M$ gilt. Dann gilt

$$n = |M| = |M \cap (0, T_{\overline{k}})| + 1 + |M \cap (T_{\overline{k}}, s)| \geq \overline{k} + v + 1 + (n + 1 - \overline{k} - l),$$

und somit $l \geq v + 2$. Wir bemerken, dass

$$T_{\overline{k}} + a_{r_1} - a_1 < T_{\overline{k}} + a_{r_1} - a_2 < \dots < T_{\overline{k}} + a_{r_1} - a_{\overline{k}} < T_{\overline{k}} + a_{r_2} - a_{\overline{k}} < \dots < T_{\overline{k}} + a_{r_{v+2}} - a_{\overline{k}} < T_{\overline{k}},$$

was genau $\overline{k} + v + 1$ Zahlen aus dem Bereich $(0, T_{\overline{k}})$ sind. Wir können also ein $r \in \{\overline{k} + 1, \overline{k} + 2, \dots, n+1\}$ und ein $s \in \{1, 2, \dots, \overline{k}\}$ bestimmen mit $T_{\overline{k}} + a_r \notin M$ und $T_{\overline{k}} + a_r - a_s \notin M$. Betrachten wir nun die Menge der Sprungweiten $B = \{a_1, a_2, \dots, a_{\overline{k}}, a_r\} \backslash \{a_s\}$. Es gilt

$$\sum_{x \in B} = T_{\overline{k}} + a_r - a_s$$

und

$$T_{\overline{k}} + a_r - a_s - \min(B) = T_{\overline{k}} - a_s \leq T_{\overline{k}-1}.$$

Wegen $|M \cap (0, T_{\overline{k}-1})| \leq \overline{k} - 1$ und der eingangs erwähnten Verschärfung mit $\overline{k} - 1$ statt n, kann der Grashüpfer $T_{\overline{k}} + a_r - a_s$ mit $\overline{k}$ Sprüngen erreichen, deren Längen aus B gewählt werden, ohneauf einem Punkt aus M zu landen. Von dort kann er zu $T_{\overline{k}} + a_r$ springen, womit eine Situation wie in Behauptung 1 mit $m = \overline{k} + 1$ erreicht wird, was den Beweis vervollständigt.

qed