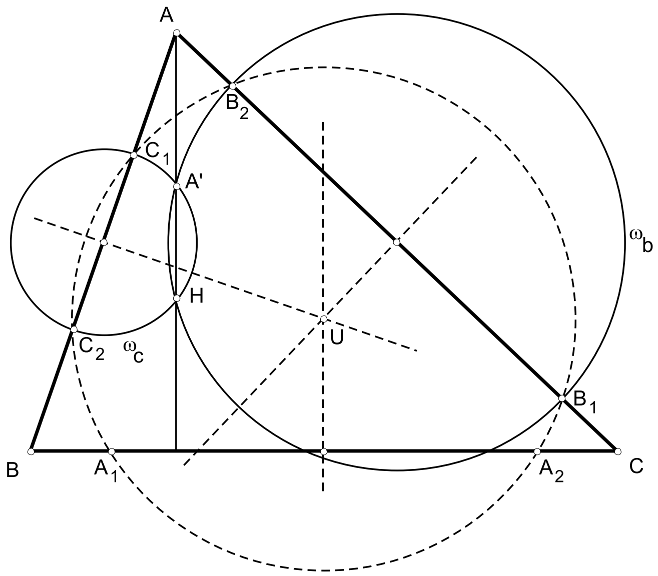
Aufgabe 1: Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit Höhenschnittpunkt H. Der Kreis durch H, dessen Zentrum der Mittelpunkt von BC ist, schneide BC in A_1 und A_2. Dementsprechend schneide der Kreis durch H, dessen Zentrum der Mittelpunkt von CA ist, CA in B_1 und B_2 und der Kreis durch H, dessen Zentrum der Mittelpunkt von AB ist, AB in C_1 und C_2.
Man zeige, dass die Punkte $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ auf einem Kreis liegen.

Lösung: Wir bemerken zunächst, dass der Mittelpunkt eines Kreises durch A_1 und A_2 auf der Streckensymmetrale von A_1A_2 liegen muss. Da der Mittelpunkt von A_1A_2 der Mittelpunkt von ω_a ist, und somit auch von BC, ist die Streckensymmetrale von A_1A_2 gleichzeitige die Streckensymmetrale von BC. Da Entsprechendes auch für die anderen beiden Dreiecksseiten gilt, kann ein möglicherweise vorhandener Umkreismittelpunkt des betrachteten Sechsecks nur im Schnittpunkt von A_1A_2, B_1B_2 und C_1C_2, also von BC, CA und AB, d.h. im Umkreismittelpunkt U von ABC liegen.



Nun betrachten wir die Kreise ω_b und ω_c. Wie in der Abbildung ersichtlich, schneiden sich diese außer in H auch in einem zweiten Punkt, den wir als A' bezeichnen. Da die Potenz von A bezüglich ω_c in jeder Sekante gleich ist, gilt

$$AC_1 \cdot AC_2 = AA' \cdot AH,$$

und analog gilt für ω_b

$$AB_1 \cdot AB_2 = AA' \cdot AH.$$

Es gilt also

$$AC_1 \cdot AC_2 = AB_1 \cdot AB_2,$$

und $B_1B_2C_1C_2$ ist somit ein Sehnenviereck, der Mittelpunkt dessen Umkreises im Schnittpunkt der Streckensymmetralen von B_1B_2 und C_1C_2 liegen muss, also in U. Es liegen also B_1, B_2, C_1 und C_2 alle auf einem Kreis mit Mittelpunkt U durch B_1. Ersetzen wir in diesem Argument ω_c durch ω_a, erkennen wir, dass A_1 und A_2 ebenfalls auf diesem Kreis liegen, womit der Beweis abgeschlossen ist. qed

Bemerkung; Hat man erkannt, dass nur U als Mittelpunkt eines Umkreises für das betrachtete Sechseck in Frage kommt, kann man auch auf verschiedene Arten analytisch nachweisen, dass

$$UA_1 = UA_2 = UB_1 = UB_2 = UC_1 = UC_2$$

gilt.

Aufgabe 2: (a) Man zeige

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1 \qquad (*)$$

für alle reellen Zahlen x, y, z, die ungleich 1 sind und für die $xyz = 1$ gilt.
(b) Man zeige, dass für unendlich viele Tripel rationaler Zahlen x, y, z, die ungleich 1 sind und für die $xyz = 1$ gilt, in $(*)$ der Gleichheitsfall eintritt.

Lösung: a) Wir setzen

$$\frac{x}{x-1}=a, \quad \frac{y}{y-1}=b, \quad \frac{z}{z-1}=c, \quad \text{also} \quad x=\frac{a}{a-1}, \quad y=\frac{b}{b-1}, \quad z=\frac{c}{c-1},$$

Mit den neuen Variablen lautet die zu beweisende Ungleichung

$$a^2+b^2+c^2\geq 1.$$

Die gegebene Bedingung $xyz = 1$ ist gleichwertig mit

$$\begin{aligned}
& abc=(a-1)(b-1)(c-1)\\
\Longleftrightarrow\quad & ab+bc+ca=a+b+c-1\\
\Longleftrightarrow\quad & (a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=2(ab+bc+ca)=2(a+b+c-1)\\
\Longleftrightarrow\quad & (a+b+c)^2-2(a+b+c)+1=a^2+b^2+c^2-1\\
\Longleftrightarrow\quad & (a+b+c-1)^2=a^2+b^2+c^2-1.
\end{aligned}$$

Da die linke Seite dieses Ausdrucks sicher nicht negativ ist, gilt dies auch für die rechte Seite, und wir erhalten

$$a^2+b^2+c^2\geq 0 \iff a^2+b^2+c^2\geq 1.$$

qed

b) Verwenden wir weiterhin die neu eingeführten Variablen, so gilt der Gleichheitsfall für

$$a+b+c-1=0 \iff a^2+b^2+c^2-1=0$$

oder

$$a+b+c=1$$

und

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^2=1 \quad &\Rightarrow\quad a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1\\
&\Rightarrow\quad ab+bc+ca=0,
\end{aligned}$$

wobei zusätzlich $a, b, c \neq 1$ gelten muss. Setzen wir $c = 1 - a - b$ ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
& ab+b(1-a-b)+(1-a-b)a=0\\
\Longleftrightarrow\quad & ab+b-ab-b^2+a-a^2-ab=0\\
\Longleftrightarrow\quad & a^2+ab+b^2-a-b=0.
\end{aligned}$$

Fassen wir dies als eine quadratische Gleichung

$$b^2+(a-1)b+a(a-1)=0$$

in der Variablen b mit fest vorgegebenem rationalen a auf, so ist die Diskriminante gleich

$$(a-1)^2-4a(a-1)=(1-a)(3a+1).$$

Wenn der Wert der Diskriminante eine Quadratzahl ist, so ist b sicher rational. Setzt man z.B. $a = \frac{k}{m}$ (wobei k und m ganzzahlig sind), so kann man erreichen, dass sowohl $m-k$ als auch $m+3k$ Quadratzahlen sind, wenn man $m = k^2 - k + 1$ setzt. In diesem Fall ist m offensichtlich nicht gleich 0 und wir haben $m - k = (k-1)^2$ und $m + 3k = (k+1)^2$. Wir sehen auch, dass verschiedene Werte von k auch verschiedene Werte von a ergeben. Die Diskriminante ist also gegeben durch den Ausdruck $\frac{(k^2-1)^2}{m^2}$, und b ist somit sicher rational. Wählt man etwa die größere Lösung für b, erhält man

$$b = \frac{m - k + k^2 - 1}{2m} = \frac{m + (m-2)}{2m} = \frac{m-1}{m},$$

und wegen $a + b + c = 1$, auch $c = \frac{1-k}{m}$. Wegen $a, b, c \neq 1$ darf k weder 0 noch 1 sein, aber alle ganzen Zahlen größer als 1 ergeben unendlich viele Tripel, wie gefordert. qed

Aufgabe 3: Man beweise, dass es unendlich viele positive ganze Zahlen n gibt, für die $n^2 + 1$ einen Primfaktor größer als $2n + \sqrt{2n}$ besitzt.

Lösung: Es sei $N > 2$ und p ein Primteiler von $(N!)^2 + 1$. (Dann gilt sicher $p > N$.) Es existiert sicher ein n mit $0 < n < \frac{p}{2}$ und $n \equiv N!\ (mod\ p)$ oder $n \equiv -N!\ (mod\ p)$. Für dieses n gilt $0 < n < p - n < p$ und $n^2 \equiv -1\ (mod\ p)$. Nun gilt aber auch

$$(p - 2n)^2 \equiv 4n^2 \equiv -4\ (mod\ p),$$

und somit

$$(p - 2n)^2 \geq p - 4.$$

Hieraus folgt

$$p \geq 2n + \sqrt{p - 4}$$

und, da

$$p - 4 \geq 2n + \sqrt{p-4} - 4 > 2n$$

für $p \geq 20$ gilt, folgt für solche p auch

$$p \geq 2n + \sqrt{2n},$$

und da p beliebig groß gewählt werden kann und p ein Teiler von n^2+1 ist, gibt es wie gefordert unendlich viele n mit der geforderten Eigenschaft.

Aufgabe 4: Man bestimme alle Funktionen $f :]0, \infty[\to]0, \infty[$ (d.h. f ist auf der Menge der positiven reellen Zahlen definiert und nimmt nur positive reelle Zahlen als Werte an), die

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

für alle positiven reellen Zahlen w, x, y, z mit $wx = yz$ erfüllen.

Setzen wir zunächst $w = x = y = z = 1$, so gilt $2 \cdot f(1)^2 = 2 \cdot f(1)$, und da $f(1) > 0$, folgt $f(1) = 1$,

Setzen wir nun $w = a$, $x = 1$ und $y = z = \sqrt{a}$, so folgt

$$\frac{f(a)^2 + 1}{2f(a)} = \frac{a^2 + 1}{2a} \iff 2af(a)^2 + 2a - 2a^2 f(a) - 2f(a) = 0$$
$$\iff 2 \cdot (af(a) - 1)(f(a) - a) = 0,$$

und somit gilt für jedes $a > 0$ entweder $f(a) = a$ oder $f(a) = \frac{1}{a}$.
Die Funktionen $f(x) = x$ und $f(x) = \frac{1}{x}$ erfüllen offensichtlich alle Voraussetzungen der Aufgabe. Es bleibt noch zu zeigen, dass dies für keine weitere Funktion der Fall ist.

Nehmen wir an, es gäbe eine weitere derartige Funktion f. Dann gibt es ein $b \neq 1$ mit $f(b) = b$ und eine $c \neq 1$ mit $f(c) = \frac{1}{c}$. Setzen wir $w = b$, $x = c$ und $y = z = \sqrt{ab}$, so folgt

$$\frac{b^2 + \frac{1}{c^2}}{2f(bc)} = \frac{b^2 + c^2}{2bc} \iff f(bc) = \left(\frac{b^2}{2} + \frac{1}{2c^2}\right) \cdot \frac{2bc}{b^2 + c^2} = \frac{bc(b^2 + c^{-2})}{b^2 + c^2}.$$

Wir wissen aber, dass entweder $f(bc) = bc$ oder $f(bc) = \frac{1}{bc}$ gelten muss.
Gilt $f(bc) = bc$, folgt

$$bc = \frac{bc(b^2 + c^{-2})}{b^2 + c^2} \iff b^2 + c^2 = b^2 + c^{-2} \quad \Rightarrow \quad c = 1,$$

was ein Widerspruch zur Annahme $c \neq 1$ ist.
Gilt $f(bc) = \frac{1}{bc}$, folgt

$$\frac{1}{bc} = \frac{bc(b^2 + c^{-2})}{b^2 + c^2} \iff b^2 + c^2 = b^4c^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad b = 1,$$

was wiederum ein Widerspruch ist.
Es gibt also keine weiteren Funktionen, die alle Bedingungen erfüllen. qed

Aufgabe 5: Seien n und k positive ganze Zahlen mit $k \geq n$ und $k - n$ gerade. Gegeben seien $2n$ Lampen, die von 1 bis $2n$ nummeriert sind. Jede Lampe ist entweder an oder aus, wobei anfangs alle Lampen aus sind. Man betrachte Folgen von Schritten: in jedem Schritt werde genau eine der Lampen umgeschaltet (von aus nach an oder von an nach aus).

Sei N die Anzahl solcher Folgen, die aus k Schritten bestehen und in dem Zustand enden, in dem die Lampen 1 bis n alle an und die Lampen $n + 1$ bis $2n$ alle aus sind.

Sei M die Anzahl solcher Folgen, die aus k Schritten bestehen und in dem Zustand enden, in dem die Lampen 1 bis n alle an und die Lampen $n + 1$ bis $2n$ alle aus sind, bei denen aber keine der Lampen $n + 1$ bis $2n$ jemals umgeschaltet worden ist.

Man bestimme das Verhältnis N/M.

Lösung: Die Schaltvorgänge seien mit $1, \ldots, k$ durchnummeriert. Eine Folge dieser Schaltvorgänge, die im erwünschten Zustand endet (also Lampen $1, \ldots n$ an und Lampen $n + 1, \ldots, 2n$ aus) bezeichnen wir als "zulässig". Wenn diese Folge die Lampen $n + 1, \ldots 2n$ nicht berührt, bezeichnen wir die Folge als "eingeschränkt". Es gibt also N zulässige Folgen, unter denen M eingeschränkt sind.

In jeder zulässigen Folge wird also jede Lampe $1, \ldots, n$ ungeradzahlig oft geschaltet und jede $n + 1, \ldots 2n$ geradzahlig oft (bei eingeschränkten Folgen 0 Mal). Wir stellen fest, dass sicher $M \neq 0$ gilt, da es etwa möglich ist, die Lampen $1, \ldots, n$ je einmal zu schalten, um dann eine beliebige Lampe zu wählen, und diese dann $k - n$ Mal zu schalten. Da $k - n$ gerade ist, resultiert dieser Prozess sicher im erwünschten Zustand.

Nun betrachten wir eine beliebige zulässige Folge $\mathbf{p}$. Wählen wir eine Lampe ℓ aus (mit $1 \leq \ell \leq n$), so wurde diese Lampe in der Folge k_ℓ Mal geschaltet. Wie schon festgehalten wurde, muss k_ℓ ungerade sein. Wir wählen nun eine beliebige gerade Anzahl dieser k_ℓ Schaltvorgänge aus, die wir nicht an der Lampe ℓ ausführen, und führen sie stattdessen an der Lampe $n + \ell$

durch. Dies kann man auf $2^{k_\ell - 1}$ Arten machen, da eine k_ℓ-elementige Menge $2^{k_\ell - 1}$ Teilmengen mit einer geraden Anzahl von Elementen hat. Wir bemerken, dass $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$ gilt.

Diese Änderungen sind voneinender unabhängig, da eine Änderung bei einer Lampe ℓ alle anderen Lampen von 1 bis n unberührt läßt. Es gibt also insgesamt $2^{k_1-1} \cdot 2^{k_2-1} \cdot \ldots \cdot 2^{k_n-1} = 2^{k-n}$ verschiedene Möglichkeiten, die so definierten Schaltungsänderungen miteinander zu kombinieren. In jeder derartigen Kombination wird jede Lampe $n+1, \ldots, 2n$ geradzahlig oft geschaltet, und jede $1, \ldots n$ ungeradzahlig oft. Der Endzustand ist also sicher immer wie gefordert.

Wir sehen, dass jede eingeschränkte Folge $\mathbf{p}$ nach dieser Vorschrift auf genau 2^{k-n} Arten modifiziert werden kann um eine zulässige Folge zu erzeugen. Umgekehrt kann aber jede zulässige Folge $\mathbf{q}$ nach dieser Vorschrift aus einer eingeschränkten Folge erhalten werden. Es muss nämlich nur jeder Schaltvorgang einer Lampe ℓ im Bereich $n+1, \ldots, 2n$ durch die Schaltung der entsprechenden Lampe $\ell - n$ ersetzt werden. In der resultierenden Folge werden die Lampen der zweiten Hälfte niemals geschaltet. Jede Lampe der zweiten Hälfte war in der Folge $\mathbf{q}$ geradzahlig oft geschaltet worden, und da jede Lampe der ersten Hälfte in dieser Folge ungeradzahlig oft geschaltet worden war, bleibt diese Ungeradzahligkeit in der neuen Folge erhalten. Die erhaltene Folge ist sicher eingeschränkt.

Wir sehen also, dass es insgesamt eine eins zu 2^{k-n} Korrespondenz zwischen den eingeschränkten Folgen und den zulässigen Folgen gibt. Der gesuchte Wert ist somit $N/M = 2^{k-n}$. qed

Aufgabe 6: Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $|BA| \neq |BC|$. Es seien ω_1 bzw. ω_2 die Inkreise der Dreiecke ABC bzw. ADC. Angenommen es existiert ein Kreis ω, der den Strahl BA in einem Punkt jenseits von A und den Strahl BC in einem Punkt jenseits von C berührt und auch die Geraden AD und CD als Tangenten hat.

Man beweise, dass sich die äußeren gemeinsamen Tangenten von ω_1 und ω_2 auf ω schneiden.

Lösung: Wir beweisen zunächst folgendes Lemma:

Lemma: Ist $ABCD$ ein konvexes Viereck, für das ein Kreis existiert, der im Winkel $\angle ABC$ eingeschrieben ist und die Verlängerungen von AD und CD berührt. Dann gilt $AB + AD = CB + CD$.

Beweis des Lemmas: Nehmen wir an, die Berührpunkte des vorgegebenen Kreises mit den Seiten AB, BC, CD und DA seien in dieser Reihenfolge wir abgebildet K, L, M und N. Dann gilt

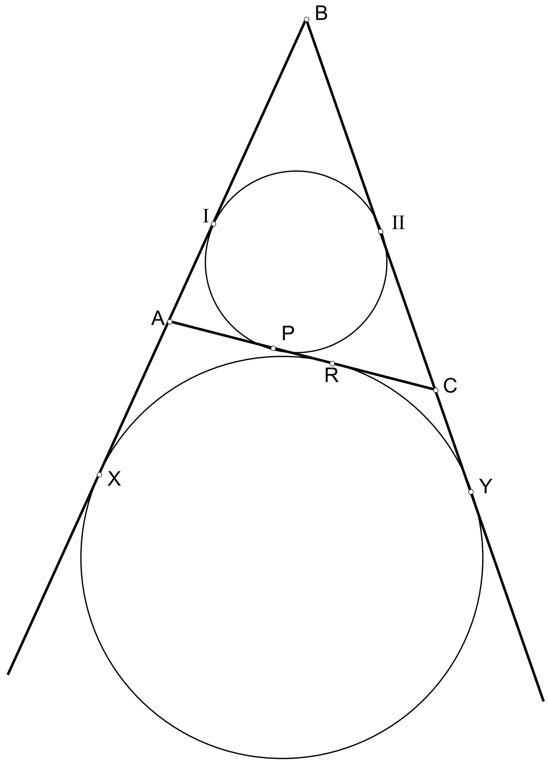
$$AB + AD = (BK - AK) + (AN - DN)$$

und

$$CB + CD = (BL - CL) + (CM - DM).$$

Da die Tangentenstrecken aus einem Punkt an einen Kreis immer einander gleich sind gilt aber $BK = BL$, $DN = DM$, $AK = AN$ und $CL = CM$, und es folgt somit wie gefordert $AB + AD = CB + CD$. qed

Forsetzung des Beweises: In weiterer Folge wird es auch nützlich sein, folgende Tatsache festzuhalten. Ist P der Berührpunkt des Inkreises ω_1 von ABC mit der Seite AC, P' der zu P bezüglich ω_1 diametral gegenüber liegende Punkt, und R der Berührpunkt des Ankreises von ABC an der Seite AC, so sind B, P' und R kollinear. Dies gilt, da die Tangenten an ω_1 in P (AC) und P' sicher parallel sind, und die zentrische Streckung aus B die ω_1 in den Ankreis abbildet, den Punkt P' von ω_1 in denjenigen Punkt des Ankreises mit dazu paralleler Tangente, also AC, abhildet. Dies ist aber genau der Punkt R, und B, P' und R sind daher sicher kollinear.



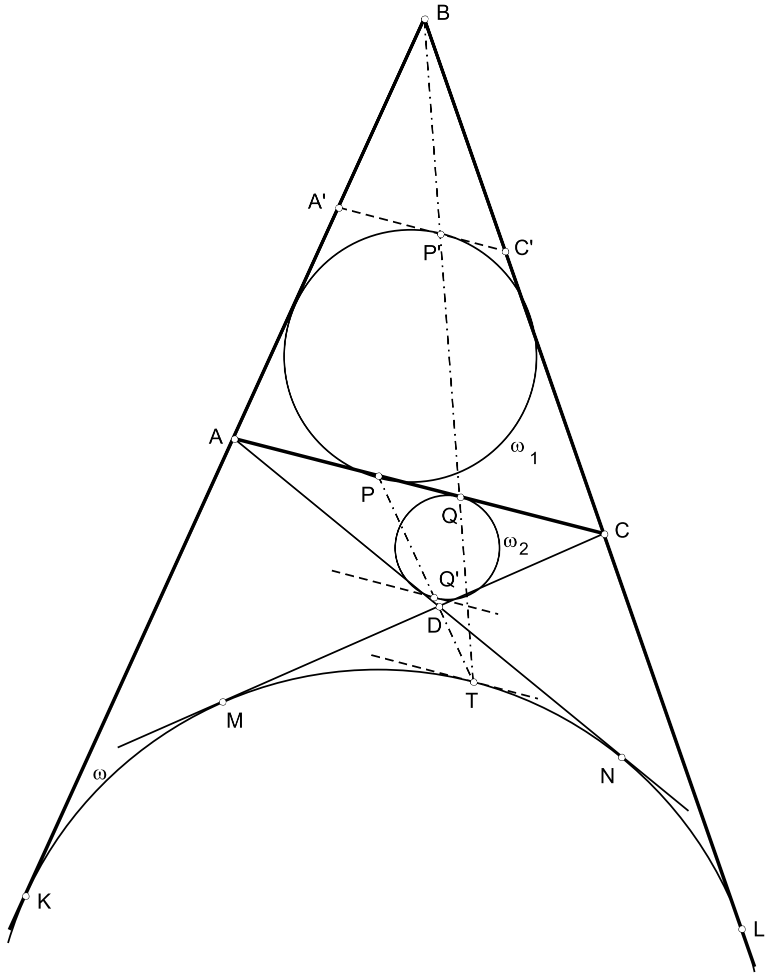
Weiters bemerken wir, dass sicher $AP = CR$ gilt. Sind nämlich X und Y die Berührpunkte von BA bzw. BC mit dem Ankreis, und I und II die Berührpunkte von ω_1 mit BA bzw. BC, so gilt wegen $BI = BII$, $IA = AP$, $AX = AR$, $IIC = CP$ und $CY = CR$,

$$\begin{aligned} BX = BY &= BI + IA + AX = BII + IIC + CY \\ &= BI + AP + AR = BI + CP + CR \\ &= AP + (AP + CP - CR) = CP + CR \\ &= AP = CR. \end{aligned}$$

Nun sind wir bereit, den Hauptteil des Beweises zu beginnen. Berühren ω_1 und ω_2 die Strecke AC in P bzw. Q, so gilt

$$AP = \frac{AC + AB - BC}{2} \quad \text{und} \quad CQ = \frac{CA + CD - AD}{2}.$$

Da nach dem Lemma $AB + AD = CB + CD \iff AB - BC = CD - AD$ gilt, folgt also $AP = CQ$. Es gilt somit $Q = R$, d.h. ω_2 berührt AC im selben Punkt wie der Ankreis von ABC an der Seite AC. (Analog berührt auch ω_1 AC im selben Punkt P wie der Ankreis von ACD an der Seite AC.) Speziell bemerken wir, dass $P \neq Q$ sicher gilt, da $AB \neq BC$ vorausgesetzt ist.



Es seien PP' und QQ' die zu AC normalen Durchmesser von ω_1 bzw. ω_2. Wegen $Q = R$ wissen wir, dass B, P' und Q kollinear sind, und dies gilt analog auch für D, Q' und P.

Nun sei T der Schnittpunkt des Durchmessers von ω normal zu AC, der AC am nächsten ist. Da die Tangente an ω in T parallel zu AC ist, bildet die zentrische Streckung mit Zentrum in B, die ω_1 auf ω abbildet, den Punkt P' auf T ab. Es sind also B, P' und T kollinear. Durch analoge Überlegung mit der zentrischen Streckung mit Zentrum in D, die ω_2 auf ω abbildet, sehen wir, dass auch D, Q' und T kollinear sind. Es folgt also, dass sowohl P', Q und T als auch P, Q' und T jeweils kollinear sind. Da PP' und QQ' parallel sind, gibt es eine zentrische Streckung mit Zentrum T, die PP' auf QQ' abbildet. Da aber PP' und QQ' Durchmesser von ω bzw. ω_2 sind, bildet diese zentrische Streckung auch ω_1 auf ω_2 ab. Da T offensichtlich auf derselben Seite von PP' und QQ' liegt, ist das Streckungsverhältnis sicher positiv, und T ist somit auch der Schnittpunkt der gemeinsamen Außentangenten von ω_1 und ω_2, wie behauptet.

qed