Erster Tag
25. Juli 2007

Aufgabe 1. Gegeben seien eine positive ganze Zahl n und reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Für jedes i $(1 \leq i \leq n)$ sei

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

und sei

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Man beweise für beliebige reelle Zahlen $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$:

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \tag{1}$$

(b) Man beweise, dass es reelle Zahlen $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ gibt, die Gleichheit in (1) liefern.

Lösung:
a) Es seien $1 \leq p \leq q \leq r \leq n$ diejenigen Indizes, für die

$$d = d_q, \quad a_p = \max\{a_j : 1 \leq j \leq q\} \quad \text{und} \quad a_r + \min\{a_j : q \leq j \leq n\},$$

und somit auch $d = a_p - a_r$, gelten. (Wir bemerken, dass diese Indizes nicht notwendigerweise eindeutig bestimmt sein müssen.)
Nun betrachten wir für beliebige reelle Zahlen $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ die Ausdrücke $|x_p - a_p|$ und $|x_r - a_r|$. Wegen

$$(a_p - x_p) + (x_r - a_r) = (a_p - a_r) + (x_r - x_p) \geq a_p - a_r = d,$$

gilt sicher $a_p - x_p \geq \frac{d}{2}$ oder $x_r - a_r \geq \frac{d}{2}$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \max\{|x_i - a_i : 1 \leq i \leq n\} &\geq \max\{|x_p - a_p|, |x_r - a_r|\} \\ &\geq \max\{a_p - x_p, x_r - a_r\} \\ &\geq \frac{d}{2}. \end{aligned}$$

qed

b) Es gibt viele Möglichkeiten, Werte für $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ mit der gewünschten Eigenschaft anzugeben. Eine davon ist die Folgende:
Seien

$$x_1 = a_1 - \frac{d}{2} \quad \text{und} \quad x_k + \max\left\{x_{k-1}, a_k - \frac{d}{2}\right\} \quad \text{fr} \;\; 2 \leq k \leq n.$$

Zunächst gilt offensichtlich für diese Werte $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ und $x_k - a_k \geq -\frac{d}{2}$ für alle $1 \leq k \leq n$. Nun bleibt noch zu zeigen, dass auch $x_k - a_k \leq \frac{d}{2}$ für alle $1 \leq k \leq n$ gilt. Sei zu diesem Zweck k ein beliebiger Index mit $1 \leq k \leq n$. Sei $l \leq k$ der kleinste Index mit $x_k = x_l$. Nun gilt entweder $l = 1$ oder $l \geq 2$ und $x_l > x_{l-1}$, aber in beiden Fällen folgt aus der Definition von x_i

$$x_k = x_l = a_l - \frac{d}{2}.$$

Wegen

Folgt somit
$$x_k - a_k = a_l - a_k - \frac{d}{2} \leq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2},$$
Und wir haben somit wegen $-\frac{d}{2} \leq x_k - a_k \leq \frac{d}{2}$ insgesamt auch
$$|x_k - a_k| \leq \frac{d}{2},$$
und somit
$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \leq \frac{d}{2}.$$
Wegen $|x_1 - a_1| = \frac{d}{2}$ gilt also die Gleichheit. qed

Aufgabe 2. Gegeben seien fünf Punkte A, B, C, D und E, so dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist und $BCED$ ein konvexes Sehnenviereck. Sei ℓ eine Gerade durch A, welche die Strecke DC im inneren Punkt F und die Gerade BC in G schneidet. Ferner gelte $EF = EG = EC$. Man beweise, dass ℓ die Winkelhalbierende von $\angle DAB$ ist.

Lösung:

Zunächst sei $CF = CG$. In diesem Fall gilt $\angle FCG = \angle GFC$, und da $ABCD$ ein Parallelogramm ist, folgt
$$\angle GAB = \angle GFC = \angle FGC = \angle FAD.$$
In diesem Fall ist also ℓ sicher eine Winkelsymmetrale von $\angle DAB$, wie gefordert.

Nun möchten wir zeigen, dass die gegebenen Bedingungen für $CF \neq CG$ nicht alle erfüllt sein können.

Sei also zunächst $CF < CG$. Seien K und L die Lotfußpunkte von E auf FC bzw. GC. Da die Dreiecke EFG und ECG jeweils gleichschenkelig sind, sind K und L auch die Mittelpunkte von FC bzw. GC. Wegen $CF < CG$ gilt also auch $KF < LC$, und somit
$$KE = \sqrt{EF^2 - KF^2} > \sqrt{EC^2 - LC^2} = LE.$$
Da $BCED$ ein Sehnenviereck ist, gilt $\angle EDC = \angle EBC$, und somit sind die rechtwinkeligen Dreiecke BEL und DEK ähnlich. Wegen $KE > LE$ folgt somit auch $DK > BL$, und somit
$$DF = DK - KF > BL - LC = BC = AD,$$
also $\frac{AD}{DF} < 1$.

Gleichzeitig sind aber die Dreiecke ADF und GCF ähnlich, und somit gilt $\frac{AD}{DF} = \frac{CG}{CF} > 1$ wegen der Annahme $CF < CG$. Dies ist ein Widerspruch, und der Fall $CF < CG$ ist somit unmöglich.

Da die Annahme $CF > CG$ nach analogen Überlegungen zur widersprüchlichen Beziehung $\frac{AD}{DF} = \frac{GC}{CF} > 1$ führt, ist auch dieser Fall unmöglich. Es gilt also sicher $CF = CG$, und ℓ ist somit die Winkelsymmetrale von $\angle DAB$, wie behauptet. qed

Aufgabe 3. In einem mathematischen Wettbewerb sind einige Teilnehmende miteinander befreundet. Freundschaft beruhe auf Gegenseitigkeit. Eine Gruppe von Teilnehmenden heiße Clizwei Teilnehmenden eine Clique.) Die Größe einer Clique ist die Anzahl ihrer Mitglieder. Die maximale Größe einer Clique in diesem Wettbewerb sei gerade. Man beweise, dass die Teilnehmenden so auf zwei Räume aufgeteilt werden können, dass die maximale Größe einer Clique in einem Raum gleich der maximalen Größe einer Clique im anderen Raum ist.

Lösung:

Zunächst bemerken wir, dass die Behauptung offensichtlich nicht stimmt, wenn die größte Clique ungeradzahlig ist. (Etwa eine Gruppe von 3 Personen, die alle eine Clique bilden, kann nicht wie gefordert aufgeteilt werden.) Für den Fall einer geradzahligen größten Clique kann aber ein Algorithmus angegeben werden, der sicher zu einer Aufteilung mit der geforderten Eigenschaft führt.

Sei A die Menge der Teilnehmenden, die sich im Raum A zu einem bestimmten Zeitpunkt befinden und B die Menge der Teilnehmenden, die sichj zum selben Zeitpunkt im Raum B befinden. Seien ferner $c(A)$ und $c(B)$ die Größen der jeweils größten Clique in A bzw. B.

Es sei nun bekannt, dass die größte Clique unter den Teilnehmenden geradezahlig ist. Wir wenden folgenden Algorithmus an:

Schritt 1: Es sei M eine Clique mit größter Anzahl. Es gelte $|M| = 2m$. Wir schicken zunächst alle Teilnehmenden aus M in den Raum A und alle anderen in den Raum B. Offensichtlich gilt

$$c(A) = |M| = 2m \geq c(B).$$

Schritt 2: Wenn $c(A) = c(B)$ sind wir schon fertig.

Wenn $c(A) > c(B)$, schicken wir eine Person von A nach B. Bei dieser Verlegung verringert sich $c(A)$ sicher um 1, während sich $c(B)$ entweder nicht ändert oder um 1 vergrößert. (Wir bemerken, dass A wegen $c(A) > c(B) \geq 1$ niemals leer sein wird.)

Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, wie $c(A) > c(B)$ gilt. Wenn nach einigen Verlegungen $c(A) = c(B)$ gilt, sind wir fertig. Wenn nicht, gilt $c(B) = c(A) + 1$.

Mit dem Ende dieses Schritts gilt sicher $c(A) \geq m$. Ansonsten wäre nämlich $c(A) \leq m - 1$ und somit $c(B) \geq m + 1 \geq c(A) + 2$.

Wir bezeichnen zum Zeitpunkt des Abbruchs von Schritt 2 $c(A) = k$. Wenn auch $c(B) = k$ gilt, sind wir fertig. Wir nehmen also für die Fortsetzung des Algorithmus $c(B) = k + 1$ an. Ferner gilt sicher $k = |A| = |A \cap M| \geq m$ und $|b \cap M| \leq m$.

Schritt 3: Wir untersuchen, ob es einen Teilnehmenden x gibt, mit $x \in B \cap M$ und eine Clique $C \subset B$ mit $|C| = k+1$ und $x \notin C$. In diesem Fall schicken wir die Person x von B zurück nach A. Danach gilt sicher $c(A) = |A| = k + 1 = |C| = c(B)$ und wir sind fertig.

Wir nehmen also für die Fortsetzung des Algorithmus an, dass es keine derartige Person x gibt. Es gilt also im weiteren, dass die Menge $B \cap M$ eine Teilmenge aller Cliquen der Größe $k + 1$ in B ist.

Schritt 4: Wir wählen eine Clique C mit $|C| = k + 1$ und schicken eine Person aus der Menge $C \backslash M$ in den Raum A. Wegen $k + 1 > m$ gibt es eine derartige Person sicher. Gilt nun $c(A) = c(B) = k$, sind wir schon fertig. Jedenfalls wird aber dieser Schritt so lange wieder holt, bis $c(B) = k$ gilt.

Es bleibt nun zu zeigen, dass zu diesem Zeitpunkt sicher auch $c(A) = k$ gilt. Dies sieht man folgendermaßen ein.

Sei $Q \subset A$ eine beliebige Clique. Wir wollen zeigen, dass $|Q| \leq k$ gilt. In Q kann es nur zwei Arten von Teilnehmenden geben. Einerseits sind dies Mitglieder von M. Diese sind sicher mit allen Mitgliedern von $B \cap M$ befreundet. Andererseits sind dies Teilnehmende, die in Schritt 4 von $B \cap M$, und sind daher auch mit allen Mitgliedern von $B \cap M$ befreundet.

Wir sehen, dass alle Mitglieder von Q mit allen Mitgliedern von $B \cap M$ befreundet sind. Dies bedeutet, dass $Q \cup (B \cap M)$ in der Menge aller Teilnehmenden ebenfalls eine Clique war. Da M eine Clique maximaler Größe ist, gilt somit

$$|M| \geq |Q \cup (B \cap M)| = |Q| + |B \cap M| = |Q| + |M| - |A \cap M|,$$

und es folgt hieraus, wie gefordert,

$$|Q| \leq |A \cap M| = k.$$

Spätestens mit dem Ende von Schritt 4 gilt also $c(A) = c(B) = k$, und wir sind fertig. qed

Zweiter Tag

26. Juli 2007

Aufgabe 4. Gegeben sei ein Dreieck ABC. Die Winkelhalbierende von $\angle BCA$ schneidet den Umkreis im Punkt R ($R \neq C$), die Mittelsenkrechte der Seite BC im Punkt P und die Mittelsenkrechte der Seite AC im Punkt Q. Der Mittelpunkt von BC sei K und der Mittelpunkt von AC sei L.

Man beweise, dass die Dreiecke RPK und RQL den gleichen Flächeninhalt haben.

Lösung:

Zunächst sehen wir, dass die Behauptung sicher gilt, wenn $AC = AB$ gilt, da die Dreiecke RPK und RQL in diesem Fall symmetrisch bezüglich der Winkelsymmetrale CR liegen und somit sicher flächengleich sind. Sei also im folgenden $AC \neq AB$, und o.B.d.A. $AC < AB$.

Wir bezeichnen $\varphi = \angle ACR = \angle BCR$. Da QL die Streckensymmetrale von AC ist, gilt $\angle QLC = 90^o$, und somit $\angle LQC = 90^o - \varphi$ und $\angle LQR = 180^o - \angle LQC = 90^o + \varphi$. Ferner gilt $QL = QC \cdot \sin\varphi$ im rechtwinkeligen Dreieck QLC. Die Fläche des Dreiecks RQL erhalten wir daher als

$$A(RQL) = \frac{1}{2} \cdot QL \cdot QR \cdot \sin\angle LQR = \frac{1}{2} \cdot QC \cdot QR \cdot \sin\varphi \cdot \sin(90^o + \varphi).$$

Analog erhalten wir für die Fläche von RPK

$$A(RPK) = \frac{1}{2} \cdot RK \cdot PR \cdot \sin\angle KPR = \frac{1}{2} \cdot PC \cdot PR \cdot \sin\varphi \cdot \sin(90^o + \varphi).$$

Bezeichnen wir nun den Umkreisradius von ABC mit r, gilt wegen der Potenz bezüglich des Umkreises

$$QC \cdot QR = r^2 - OQ^2 = r^2 - OP^2 = PC \cdot PR,$$

da das Dreieck OPQ wegen $\angle LQR = \angle KPR = 90^o + \varphi$ gleichschenkelig ist, mit $OP = OQ$.

Aufgabe 5. Es seien a und b positive ganze Zahlen.

Man beweise: Wenn $4ab-1$ ein Teiler von $(4a^2-1)^2$ ist, so gilt $a=b$.

Lösung:

Wir bezeichnen das geordnete Paar positiver ganzer Zahlen (a,b) als *schlecht*, wenn $4ab-1$ den Ausdruck $(4a^2-1)^2$ teilt, und $a \neq b$ gilt. Wir möchten zeigen, dass es keine schlechten Paare gibt, womit die Behauptung folgt. Zu diesem Zweck verwenden wir zwei Hilfsergebnisse.

Lemma 1: Ist (a,b) schlecht mit $a<b$, so gibt es eine Zahl $c<a$, sodass auch das Paar (a,c) schlecht ist.

Beweis: Sei $r=\frac{(4a^2-1)^2}{4ab-1}$. Es gilt

$$r=-r\cdot(-1)\equiv(-r)\cdot(4ab-1)=-(4a^2-1)^2\equiv -1\ (mod\ 4a),$$

und es gibt daher eine positive ganze Zahl c mit $r=4ac-1$. Wegen $a<b$ gilt

$$4ac-1=\frac{(4a^2-1)^2}{4ab-1}<\frac{(4a^2-1)^2}{4a^2-1}=4a^2-1,$$

und somit auch $c<a$. Aufgrund der Konstruktion ist $4ac-1$ offensichtlich ein Teiler von $(4a^2-1)^2$, und (a,c) ist somit wieder ein schlechtes Paar.

Lemma 2: Ist (a,b) schlecht, so ist (b,a) ebenfalls schlecht.

Beweis: Wegen $1=1^2\equiv(4ab)^2\ (mod\ 4ab-1)$ gilt

$$(4b^2-1)^2\equiv(4b^2-(4ac)^2)^2=16b^2\cdot(4a^2-1)^2\equiv 0\ (mod\ 4ab-1),$$

und $4ab-1$ teilt somit $(4b^2-1)^2$, womit auch (b,a) ein schlechtes Paar ist.

Nun nehmen wir an, dass (a,b) dasjenige schlechte Paar ist, für das der Wert von $2a+b$ minimal ist. Gilt $a<b$, so gibt es ein $c<a$, sodass (a,c) ebenfalls ein schlechtes Paar ist, und es gilt sicher $2a+c<2a+a<2a+b$.

Ist $a>b$, so ist (b,a) auch ein schlechtes Paar, und es gilt $2b=a<2a+b$. In beiden Fällen gibt es ein schlechtes Paar, für das der Wert von $2a+b$ kleiner als der als minimal vorausgesetzte Wert ist, was einen Widerspruch ergibt.

Es gibt somit keine schlechtes Paar, und $4ab-1$ kann nur dann den Ausdruck $(4a^2-1)^2$ teilen, wenn $a=b$ gilt, wie behauptet. qed

Aufgabe 6. Es sei n eine positive ganze Zahl. Gegeben sei

$$S=\{(x,y,z):x,y,z\in\{0,1,\dots,n\},x+y+z>0\},$$

eine Menge von $(n+1)^3-1$ Punkten des drei-dimensionalen Raumes.

Man bestimme die kleinstmögliche Anzahl von Ebenen, deren Vereinigung die Menge S umfasst, aber nicht den Punkt $(0,0,0)$.

Lösung:

Wir zeigen, dass die gesuchte Anzahl von Ebenenen $3n$ beträgt. Zunächst ist es nicht schwer, ein Menge von $3n$ Ebenen anzugeben, die die geforderte Eigenschaft hat. Ein derartiges Beispiel weiteres Beispiel wäre die Menge der Ebenen mit den Gleichungen $x+y+z=k$ für $1 \leq k \leq 3n$. Es ist also nur notwendig zu zeigen, dass $3n$ die kleinstmögliche Anzahl von Ebenen ist. Zu diesem Zweck verwenden wir das folgende Lemma:

Lemma: Gegeben sei ein Polynom $P(x_1, \ldots, x_k)$ in k Variablen mit $P \neq 0$. Es nehme P den Wert 0 für alle Vektoren $(x_1, \ldots, x_k)$ mit $x_i, \ldots, x_k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ und $x_1 + \ldots + x_k > 0$ an, aber es sei $P(0, \ldots, 0) \neq 0$. Dann gilt $\deg P \geq kn$.

Beweis: Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion in k. Der Fall $k = 0$ ist wegen $P \neq 0$ trivial.

Wir schreiben nun zur besseren Übersicht $y + x_k$. Sei $R(x_1, \ldots, x_{k-1}, y)$ der Rest von P modulo $Q(y) = y(y-1)\ldots(y-n)$. Das Polynom $Q(y)$ nimmt für jeden Wert $y = 0, 1, \ldots, n$ den Wert 0 an, und es gilt somit $P(x_1, \ldots, x_{k-1}, y) = R(x_1, \ldots, x_{k-1}, y)$ für alle $x_1, \ldots, x_{k-1}, y \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Das Polynom R erfüllt also auch die Voraussetzungen des Lemmas, und es gilt $\deg_y R \leq n$ und $\deg R \leq \deg P$. Es genügt also zu zeigen, dass $\deg R \geq nk$ gilt.

Nun schreiben wir das Polynom R in der Form

$$R(x_1, \ldots, x_{k-1}, y) = R_n(x_1, \ldots, x_{k-1})y^n = R_{n-1}(x_1, \ldots, x_{k-1})y^{n-1} + \ldots = R_0(x_1, \ldots, x_{k-1}).$$

Wir zeigen nun, dass das Polynom R_n ebenfalls die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt.

Zu diesem Zweck betrachten wir das Polynom $T(y) = R(0, \ldots, 0, y)$. Es gilt sicher $\deg_y T \leq n$, und da T n Nullstellen $y = 1, \ldots, n$ besitzt, aber $T(0) \neq 0$ gilt, gilt sogar $\deg_y T = n$. Für den Leitkoeffizienten gilt also $R_n(0, \ldots, 0) \neq 0$. (Insbesondere für den Fall $k = 1$ gilt $R_n \neq 0$.)

Wählen wir beliebige Zahlen $a_1, \ldots, a_{k-1} \in \{0, 1, \ldots, n\}$ mit $a_1 + \ldots + a_{k-1} > 0$, erhalten wir für $R(x_1, \ldots, x_{k-1}, y)$ ein Polynom in y, welches den Wert 0 für $y = 0, 1, \ldots, n$ annimmt, und für das $\deg_y R \leq n$ gilt. Somit gilt für diese Werte $R \equiv 0$, und wir haben somit $R_i(a_1, \ldots, a_{k-1}) = 0$ für alle $i = 0, 1, \ldots, n$. Speziell erhalten wir in diesem Fall $R_n(a_1, \ldots, a_{k-1}) = 0$.

Das Polynom $R_n(x_1, \ldots, x_{k-1})$ erfüllt somit die Voraussetzungen des Lemma, und es folgt $\deg R_n \geq (k-1) \cdot n$. Somit erhalten wir

$$\deg P \geq \deg R \geq \deg R_n + n \geq kn,$$

Was den Beweis des Lemmas abschließt.

Nun können wir den Beweis abschießen. Wir nehmen an, es wären N Ebenen vorgegeben, die die Punkte von S abdecken, nicht aber den Ursprung. Ihre Gleichungen seien $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$. Nun betrachten wir das Polynom

$$P(x, y, z) = \prod_{i=1}^{N} (a_i x + b_i y + c_i z + d_i).$$

Es gilt sicher $\deg P = N$. P hat die Eigenschaft, dass $P(x_0, y_0, z_0) = 0$ für $(x_0, y_0, z_0) \in S$ gilt, aber $P(0, 0, 0) \neq 0$. Nach dem Lemma gilt nun $N = \deg P \geq 3n$, und der Beweis ist fertig. qed