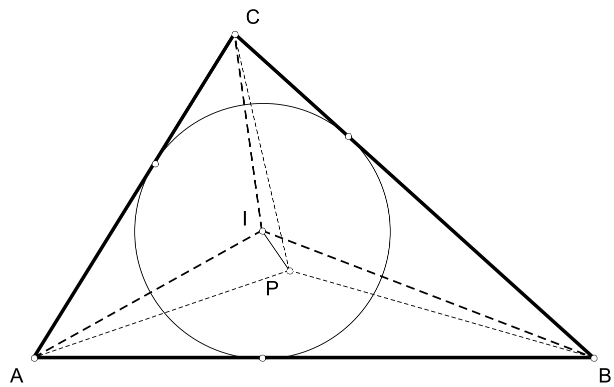
Aufgabe 1. Es sei ABC ein Dreieck mit dem Inkreismittelpunkt I. Für einen Punkt P im Inneren des Dreiecks gelte

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Man beweise:

- $\overline{AP} \geq \overline{AI}$
- Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $P = I$ gilt.

Beweis:



Damit $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$ gelten kann, dürfen weder gleichzeitig $\angle PBC < \angle PBA$ und $\angle PCB < \angle PCA$, noch $\angle PBC > \angle PBA$ und $\angle PCB > \angle PCA$ gelten. Wie nehmen o.B.d.A. $\angle PBC > \angle PBA$ ($\iff$ $\angle PBC > \frac{1}{2} \cdot \angle CBA$ und $\angle PCB < \angle PCA$ ($\iff$ $\angle PCB < \frac{1}{2} \cdot \angle ACB$) an.
Sei $\alpha := \angle BAC$, $\beta := \angle CBA$, $\gamma := \angle ACB$ und $\varepsilon := \angle PBI$. Wegen

$$\begin{aligned}
& \angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB \\
\iff\ & (\angle IBA - \varepsilon) + (\angle ICP + \angle ICA) = (\angle IBC + \varepsilon) + (\angle ICB - \angle ICP) \\
\iff\ & \frac{\beta}{2} - \varepsilon + \angle ICP + \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta}{2} + \varepsilon + \frac{\gamma}{2} - \angle ICP \\
\iff\ & \angle ICP = \varepsilon,
\end{aligned}$$

gilt $\angle IBP = \angle ICP$, und $BCIP$ ist daher ein Sehnenviereck. Es gilt somit $\angle PIC = 180^o - \angle PBC = 180^o - \left(\frac{\beta}{2} + \varepsilon\right)$. Da ferner $\angle CIA = 180^o - \angle IAC - \angle ICA = 180^o - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}
\angle AIP &= 360^o - \angle CIA - \angle PIC = 360^o \\
&= 360^o - \left(180^o - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) - \left(180^o - \frac{\beta}{2} - \varepsilon\right) \\
&= \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \varepsilon \\
&= 90^o + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da der Winkel im Dreieck $\triangle AIP$ gegenüber der Seite AP stumpf ist, muss AP die längste Seite im Dreieck sein, und somit länger als die Strecke AI für jeden Wert $\varepsilon > 0$. Gleichheit gilt nur für $\varepsilon = 0$, d.h. für $P = I$, wie behauptet. qed

Aufgabe 2. Gegeben sei ein regelmäßiges 2006-Eck P. Eine Diagonale von P heiße *gut*, wenn deren Endpunkte den Rand von P in zwei Teile zerlegen, die jeweils aus einer ungeraden Anzahl von Seiten von P bestehen. Auch die Seiten von P heißen *gut*.

Nun werde P durch 2003 Diagonalen in Dreiecke zerlegt, wobei keine zwei Diagonalen einen Schnittpunkt im Inneren von P haben. Man bestimme die maximale Anzahl von gleichschenkeligen Dreiecken mit zwei *guten* Dreiecksseiten, die in einer solchen Zerlegung von P auftreten können.

Beweis: Wir bezeichnen zunächst ein Dreieck mit zwei guten Seiten ebenfalls als *gut*. Es sei $A_iA_jA_k$ ein gutes Dreieck in einer gegebenen Zerlegung. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass die Seiten A_iA_j und A_jA_k gut sind. Wir sagen, dass die ungerade Anzahl von Seiten zwischen den Eckpunkten A_i und A_j bzw. A_j und A_k zu den Seiten A_iA_j und A_jA_k gehören. Nun stellen wir fest, dass mindestens eine Seite in jeder dieser Gruppen zu keiner weiteren (guten) Seite eines guten Dreiecks der Zerlegung gehört. Jedes gute Dreieck mit Eckpunkten von A_i bis A_j hat zwei gute Seiten, und somit gehört eine gerade Anzahl von Seiten in Summe zu jedem solchen Dreieck. Streichung aller Seiten, die zu einem derartigen Dreieck gehören muss also mindestens eine Seite übrig lassen, die nur zum Ausgangsdreieck gehören kann.

Wir halten also diese Seiten von P fest, und weisen sie dem Dreieck $A_iA_jA_k$ zu. Wir erkennen, dass zwei Seiten jedem Dreieck der Zerlegung auf diese Art zugewiesen werden können, wobei keine Seite zwei Dreiecken zugewiesen wird. Es folgt, dass es in der Zerlegung höchstens 1003 ungerade gleichseitige Dreiecke geben kann.

Eine solche Zerlegung ist auch in der Tat möglich. Zeichnet man z.B. in der Zerlegung alle Diagonalen $A_{2k}A_{2k+2}$ (wobei die Indizes modulo 2006 gewählt werden), sind alle Voraussetzung erfüllt. Die Zahl 1003 ist also das gesuchte Maximum. qed

---

Aufgabe 3. Man bestimme die kleinste reelle Zahl M, so dass für alle reellen Zahlen a, b und c die folgende Ungleichung gilt:

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \le M\cdot(a^2+b^2+c^2)^2$$

Beweis: Wir betrachten zunächst das kubische Polynom

$$P(t) = tb(t^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ct(c^2-t^2).$$

Man kann sehr leicht überprüfen, dass $P(b) = P(c) = P(-b-c) = 0$, und somit

$$P(t) = (b-c)(t-b)(t-c)(t+b+c)$$

gilt, da der kubische Koeffizient $b-c$ ist. Die linke Seite der Ungleichung kann daher in der Form

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| = |P(a)| = |(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)|$$

geschrieben werden. Die Aufgabe reduziert sich also auf die Bestimmung der kleinsten Zahl M, die die Ungleichung

$$|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \le M\cdot(a^2+b^2+c^2)^2 \tag{1}$$

erfüllt. Diese Ungleichung ist symmetrisch, und wir können daher o.B.d.A. $a \le b \le c$ annehmen. Unter dieser Annahme gilt

$$|(a-b)(b-c)| = (b-a)(c-b) \le \left(\frac{(b-a)+(c-b)}{2}\right)^2 = \frac{(c-a)^2}{4} \tag{2}$$

mit Gleichheit genau für $b-a=c-b$, also für $2b=a+c$. Weiters gilt

$$\left(\frac{(c-b)+(b-a)}{2}\right)^2 \le \frac{(c-b)^2+(b-a)^2}{2},$$

oder

$$3(c-a)^2 \le 2\cdot[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2], \tag{3}$$

wieder mit Gleichheit genau für $2b=a+c$. Aus (2) und (3) erhalten wir

$$\begin{aligned}
& |(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \\
\le\ & \frac{1}{4}\cdot|(c-a)^3(a+b+c)| \\
=\ & \frac{1}{4}\cdot\sqrt{(c-a)^6(a+b+c)^2} \\
\le\ & \frac{1}{4}\cdot\sqrt{\left(\frac{2\cdot[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2]}{3}\right)^3\cdot(a+b+c)^2} \\
=\ & \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\sqrt[4]{\left(\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}\right)^3\cdot(a+b+c)^2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Nach der AM-GM Ungleichung setzt sich die Abschätzung wie folgt fort:

$$\begin{aligned}
& |(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \\
\le\ & \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2+(a+b+c)^2}{4}\right)^2 \\
=\ & \frac{9\sqrt{2}}{32}\cdot(a^2+b^2+c^2)^2.
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass $M \le \frac{9}{32}\sqrt{2}$ gilt, mit Gleichheit genau für $2b=a+c$ und

$$\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}=(a+b+c)^2.$$

Setzen wir $b=\frac{a+c}{2}$ in der letzten Gleichung ein, erhalten wir die gleichwertige Form

$$2(c-a)^2=9(a+c)^2.$$

Die Gleichheitsbedingungen können somit geschrieben werden als

$$2b=a+c \qquad \text{und} \qquad (c-a)^2=18b^2.$$

Setzen wir $b=1$ folgt $a=1-\frac{3}{2}\sqrt{2}$ und $c=1+\frac{3}{2}\sqrt{2}$. Wir sehen, dass $M=\frac{9}{32}\sqrt{2}$ tatsächlich der kleinste Wert ist, welcher die ungleichung erfüllt, wobei Gleichheit für jedes Tripel (a,b,c), welches bis auf Permutation proportional zu $\left(1-\frac{3}{2}\sqrt{2},1,1+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ ist. qed

---

Aufgabe 4. Man bestimme alle Paare (x,y) ganzer Zahlen, welche die folgende Gleichung erfüllen:

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2.$$

Beweis: Zunächst untersuchen wir kleine Werte von x. Für $x<0$ kann 2^x+2^{2x+1} nur dann ganzzahlig sein, wenn $2^x+2^{2x+1}=\frac{1}{2}$ gilt. Dies ist gleichwertig mit $x=-1$, und in diesem Fall gilt $1+2^x+2^{2x+1}=2$, womit y nicht ganzzahlig sein kann. Es gibt also keine Lösung für $x<0$.

Für $x = 0$ erhalten wir $y^2 = 4 \iff y = \pm 2$. Es gibt keine Lösungen für $x = 1, 2, 3$, da $x = 1 \Rightarrow y^2 = 13$, $x = 2 \Rightarrow y^2 = 39$ und $x = 3 \Rightarrow y^2 = 137$ gelten. Für $x = 4$ gilt $y^2 = 529 \iff y = \pm 23$, und wir haben somit die Lösungen

$$(0, \pm 2) \quad \text{und} \quad (4, \pm 23)$$

gefunden.

Wir möchten nun zeigen, dass es keine Lösungen für $x \geq 5$ gibt. Nehmen wir an, es gäbe eine Lösung mit $x \geq 5$ und o.B.d.A. $y > 0$. Da

$$\begin{aligned} 1 + 2^x + 2^{2x+2} &= y^2 \quad \text{und} \\ 1 + 2^{x+1} + 2^{2x} &= (1 + 2^x)^2 \end{aligned}$$

gelten, können wir die zweite Gleichung von der ersten abziehen, und erhalten

$$\begin{aligned} y^2 - (1 + 2^x)^2 &= 2 \cdot 2^{2x} + 2^x + 1 - 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 1 \\ \iff [y - (1 + 2^x)] \cdot [y + (1 + 2^x)] &= 2^{2x} - 2^x = 2^x \cdot (2^x - 1). \end{aligned}$$

Es ist klar, dass sowohl y als auch $1 + 2^x$ ungerade sein müssen, und da $2^x \cdot (2^x - 1)$ sicher positiv ist, gilt auch $y > 1 + 2^x$. Die Ausdrücke $y - (1 + 2^x)$ und $y + (1 + 2^x)$ müssen also beide gerade sein. Sie können aber keinen gemeinsamen Faktor 2^2 haben, da in diesem Fall auch ihre Summe $2y$ den Faktor 2^2 hätte, was in Widerspruch zur Annahme eines ungeraden y stünde.

Es gibt also zwei Möglichkeiten. Entweder gilt

$$y - (1 + 2^x) = 2m \quad \text{und} \quad y + (1 + 2^x) = 2^{x-1} n$$

oder

$$y - (1 + 2^x) = 2^{x-1} m \quad \text{und} \quad y + (1 + 2^x) = 2n,$$

in beiden Fällen mit $mn = 2^x - 1$. Letzteres ist nicht möglich, da $y = 2n - (1 + 2^x) \leq 2 \cdot (2^x - 1) - (1 + 2^x) = 2^x - 3$ im Widerspruch zu $y > 1 + 2^x$ steht. Der einzig mögliche Fall ist also der erste. Lösen wir das Gleichungssystem, erhalten wir

$$y = m + 2^{x-2} \cdot n \quad \text{und} \quad 1 + 2^x = 2^{x-2} \cdot n - m.$$

Sowohl m als auch n sind ungerade. Nun möchten wir zeigen, dass $4 < n < 7$ gelten muss. Wegen $y > 1 + 2^x$ gilt

$$2^{x+1} + 2 = 2 \cdot (1 + 2^x) < y + 1 + 2^x = 2^{x-1} \cdot n,$$

womit n größer als $2^2 = 4$ sein muss. Da n ungerade ist, folgt $n \geq 5$. Da $1 + 2^x = 2^{x-2} \cdot n - m$ gilt, folgt auch

$$m = 2^{x-2} \cdot n - 2^x - 1 \geq 5 \cdot 2^{x-2} - 2^x - 1 = 2^{x-2} - 1.$$

Wenn $n \geq 7$ gilt, so folgt

$$2^x - 1 = mn \geq (2^{x-2} - 1) \cdot 7 = 2^x + 3 \cdot 2^{x-2} - 7 > 2^x - 1,$$

was einen Widerspruch ergibt. Wir sehen, dass $n < 7$ gelten muss, und somit folgt $n = 5$.

Einsetzen von $n = 5$ ergibt

$$m = 5 \cdot 2^{x-2} - 2^x - 1 \quad \text{und} \quad y = m + 2^{x-2} \cdot 5 = 3 \cdot 2^{x-1} - 1.$$

Es folgt somit

$$(3 \cdot 2^{x-1} - 1)^2 = y^2 = 1 + 2^x + 2^{2x+2},$$

oder $9 \cdot 2^{2x-2} - 3 \cdot 2^x = 2^x + 2^{2x+1}$. Lösen wir diese Gleichung, erhalten wir $4 \cdot 2^x = 2^{2x-2}$, woraus $x = 4$ folgt, im Widerspruch zur Annahme $x \geq 5$. Es gibt also keine Lösung für $x \geq 5$, und wir sind fertig. qed

---

Aufgabe 5. Es sei $P(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten vom Grad n mit $n > 1$. Ferner sei k eine positive ganze Zahl. Wir betrachten das Polynom

$$Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots)),$$

wobei P genau k-mal auftritt.

Man beweise, dass höchstens n ganze Zahlen t mit $Q(t) = t$ existieren.

Beweis: Die Behauptung ist offensichtlich richtig wenn jeder ganzzahlige Fixpunkt von Q auch ein Fixpunkt von P ist. Wir können also annehmen, dass dies nicht der Fall ist. Es sei x_0 eine ganze Zahl, sodass $Q(x_0) = x_0$ und $P(x_0) \neq x_0$ gilt. Definieren wir $x_{i+1} = P(x_i)$ für $i = 0, 1, 2, \dots$, so gilt sicher $x_k = x_0$.

Nun ist es offensichtlich, dass der Ausdruck $P(u) - P(v)$ immer durch $u - v$ teilbar ist. (Gilt $P(x) = \sum a_i x^i$, so ist jeder Ausdruck $a_i(u^i - v^i)$ durch $u - v$ teilbar.) In der Folge

$$x_0 - x_1, \quad x_1 - x_2, \quad \dots, \quad x_{k-1} - x_k, \quad x_k - x_{k+1}$$

ist jedes Glied ein Teiler des folgenden, und wegen $x_k - x_{k+1} = x_0 - x_1$ haben somit all diese Glieder den selben Absolutwert.

Für $x_m = \min(x_1, \dots, x_k)$ bedeutet dies $x_{m-1} - x_m = -(x_m - x_{m+1})$, und somit $x_{m-1} = x_{m+1} (\neq x_m)$. Es folgt also, dass aufeinanderfolgende Differenzen in der Folge jeweils umgekehrtes Vorzeichen besitzen, und $x_0, x_1, x_2, \dots$ ist somit eine alternierende Folge mit zwei verschiedenen Werten. Jeder Fixpunkt von Q ist somit ein Fixpunkt von $P(P(x))$. Es bleibt noch zu zeigen, dass es höchstens n derartige Fixpunkte geben kann.

Es sei a ein derartiger Fixpunkt, also es gelte $b = P(a) \neq a$. Dann gilt auch $a = P(b)$. Es sei α ein beliebiger anderer Fixpunkt von $P(P(x))$ und $P(\alpha) = \beta$ (womit auch $P(\beta) = \alpha$ gilt). Die Zahlen α und β müssen nicht verschieden sein (α kann ein Fixpunkt von P sein), aber die Zahlen α und β sind jeweils verschieden von a und b. Wegen $(u - v)|(P(u) - P(v))$ teilen die Paare $\alpha - a$ und $\beta - b$ einander, und es folgt somit

$$\alpha - b = \pm(\beta - a), \qquad \alpha - a = \pm(\beta - b).$$

Nehmen wir an, es würde in beiden Fällen das Pluszeichen gelten, also $\alpha - b = \beta - a$ und $\alpha - a = \beta - b$. Subtraktion liefert in diesem Fall $a - b = b - a$, was einen Widerspruch zu $a \neq b$ liefert. Es muss also einmal das Minuszeichen gelten. Wir erhalten also $\alpha + \beta = a + b$, bzw. $a + b - \alpha - P(\alpha) = 0$.

Bezeichnen wir nun $a + b$ als C, so erkennen wir, dass jeder ganzzahlige Fixpunkt von Q außer a und b eine Nullstelle des Polynoms $F(x) = C - x - P(x)$ sein muss. Dies gilt aber selbstverständlich für a und b auch. Da das Polynom P vom Grad $n > 1$ ist, ist dies auch für F der Fall, und es kann nicht mehr als n Nullstellen besitzen. qed

---

Aufgabe 6. Gegeben sei ein konvexes Polygon P. Jeder Seite b von P wird das Maximum der Flächeninhalte jener Dreiecke zugeordnet, die in P liegen und die Seite b als eine ihrer Seiten haben.

Man beweise, dass die Summe der Flächeninhalte, die den Seiten von P zugeordnet wurden, mindestens doppelt so groß wie der Flächeninhalt von P ist.

Beweis: Zunächst beweisen wir folgendes

Lemma: In jedem konvexen $2n$-eck mit der Fläche S gibt es eine Seite und einen Eckpunkt, welche zusammen ein Dreieck mit Fläche nicht kleiner als S/n aufspannen.

Beweis des Lemmas: Unter den *Hauptdiagonalen* des $2n$-ecks verstehen wir jene Diaginalen, die das Vieleck in zwei Teile mit gleich vielen Seiten zerteilen. Für jede Seite b des $2n$-ecks sei Δ_b das Dreieck ABP, sodass A und B die Endpunkte von b sind, und P der Schnittpunkt der Hauptdiagonalen durch A bzw. B. Wir behaupten nun, dass die Vereinigung aller Dreiecke Δ_b das ganze Vieleck überdeckt.

Um dies zu zeigen, wählen wir eine beliebige Seite ABund betrachten die Hauotdiagonale AA' als orientierte Strecke. Sei X ein beliebiger Punkt im Inneren des Vielecks, auf keiner Hauptdiagonalen liegend. Um eine Orientierung festzulegen, sei X auf der linken Seite des Strahls AA'. Nun betrachten wir die Folge der Hauptdiagonalen AA', BB', CC', $\ldots$, wobei $A, B, C, \ldots$ aufeinanderfolgende Eckpunkte rechts von AA' sind.

Das n-te Glied dieser Folge ist die Diagonale $A'A$ (d.h. AA' in verkehrter Richtung), welche den Punkt X auf ihrer rechten Seite hat. Es existieren also zwei aufeinanderfolgende Eckpunkte K, L in der Folge $A, B, C, \ldots$ vor A' mitder Eigenschaft, dass X noch links von KK' aber schon rechts von LL'. Dies bedeutet aber, dass der Punkt X im Dreieck $\Delta_{\ell'}$, $\ell' = K'L'$ liegen muss. Natürlich kann man analog für Punkte auf der rechten Seite von AA' argumentieren, und Punkte auf den Hauptdiagonalen sind ohnehin inkludiert. Die Dreiecke Δ_b überdecken also zusammen das ganze Vieleck.

Die Summe ihrer Flächen ist also nicht weniger als S. Wir können also zwei gegenüberliegende Seiten bestimmen (etwa $b = AB$ und $b' = A'B'$ wobei AA' und BB' Hauptdiagonalen sind), sodass $[\Delta_b] + [\Delta_{b'}] \geq S/n$, wobei $[\cdots]$ die Fläche eines Gebiets andeuten soll. Nehmen wir an, AA' und BB' würden sich im Punkt P schneiden. Wir nehmen o.B.d.A. $PB \geq PB'$ an. Dann gilt

$$[ABA'] = [ABP] + [PBA'] \geq [ABP] + [PA'B'] = [\Delta_b] + [\Delta_{b'}] \geq S/n,$$

womit das Lemma bewiesen ist.

Fortsetzung des Beweises: Es sei nun $\mathcal{P}$ ein beliebiges konvexes Vieleck mit der Fläche S und m Seiten $a_1, \ldots, a_m$. Sei S_i die Fläche des größten Dreiecks in $\mathcal{P}$ mit der Seite a_i. Nun nehmen wir, im Gegensatz zur Behauptung an, dass

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{S_i}{S} < 2$$

gilt. Dann existieren rationale Zahlen $q_1, \ldots, q_m$, sodass $\sum q_i = 2$ und $q_i > S_i/S$ für jeden Index i.

Sei n ein gemeinsamer Nenner der m Brüche $q_1, \ldots, q_m$. Wir schreiben $q_i = k_i/n$, und es gilt somit $\sum k_i = 2n$. Teilen wir jede Seite a_i von $\mathcal{P}$ in k_i gleich große Teile, entsteht ein konvexes $2n$-eck mit der Fläche S, in dem möglicherweise einige Innenwinkel gleich 180° sind. Auf dieses Vieleck wenden wir das Lemma an. Demnach hat dieses $2n$-eck eine Seite b und einen Eckpunkt H welche eine Dreieck T mit der Fläche $[T] \geq S/n$ aufspannen. Ist b ein Stück der Seite a_i von $\mathcal{P}$, so hat das Dreieck W mit der Grundlinie a_i und der Spitze H die Fläche

$$[W] = k_i \cdot [T] \geq k_i \cdot S/n = q_i \cdot S > S_i,$$

im Widerspruch zur Definition von S_i. qed