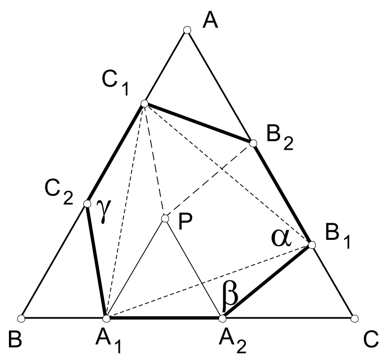
Aufgabe 1

Auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks ABC werden sechs Punkte folgendermaßen gewählt: A_1 und A_2 auf BC, B_1 und B_2 auf CA sowie C_1 und C_2 auf AB, wobei diese Punkte die Eckpunkte eines konvexen Sechsecks $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ mit gleich langen Seiten sind. Man beweise, dass sich die Geraden A_1B_2, B_1C_2 und C_1A_2 in einem Punkt schneiden.

Lösung:



Es sei P der Punkt im Inneren des Dreiecks ABC mit $A_1P = A_2P = A_1A_2$. Da die Dreiecke ABC und A_1A_2P beide gleichseitig sind und BC und A_1A_2 auf derselben Geraden liegen, gilt $A_1P \| C_1C_2$ und $A_2P \| B_1B_2$. Da alle Seiten des Sechsecks gleich lang wie die Seiten des Dreiecks A_1A_2P sind, sind also die Vierecke $A_1PC_1C_2$ und $A_2PB_2B_1$ beide Rhomben. Das Dreieck PB_2C_1 ist somit gleichseitig, und es gilt $\angle C_1PB_2 = 60^o$.

Wir bezeichnen nun $\angle B_2B_1A_2 =: \alpha$, $\angle B_1A_2A_1 =: \beta$ und $\angle A_1C_2C_1 =: \gamma$. Da α und β Außenwinkel des Dreiecks CA_2B_1 sind, gilt

$$(180^o - \alpha) + (180^o - \beta) + 60^o = 180^o \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 240^o.$$

Betrachten wir ferner die Winkel in P, so gilt wegen $\angle A_2PB_2 = \alpha$ und $\angle A_1PC_1 = \gamma$

$$\alpha + 60^o + \gamma + 60^o = 360^o \quad \Rightarrow \quad \alpha + \gamma = 240^o,$$

womit auch $\beta = \gamma$ folgt. Wir sehen also, dass die gleichschenkeligen Dreiecke $A_1A_2B_1$ und $C_1C_2A_1$ (und analog auch $B_1B_2C_1$) kongruent sind, womit auch die Strecken A_1B_1 und C_1A_1 (und analog auch B_1C_1) alle gleich lang sind. Das Dreieck $A_1B_1C_1$ ist somit gleichseitig, und da die Dreiecke $A_1A_2B_1$, $B_1B_2C_1$ und $C_1C_2A_1$ alle gleichschenkelig sind, sind die Geraden A_1B_2, B_1C_2 und C_1A_2 genau die Höhen des gleichseitigen Dreiecks $A_1B_1C_1$, die sich im Mittelpunkt des Dreiecks schneiden. qed

---

Aufgabe 2

Sei $a_1, a_2, \ldots$ eine Folge von ganzen Zahlen mit unendlich vielen positiven und unendlich vielen negativen Gliedern. Für jede positive ganze Zahl n gelte: Die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ haben n verschiedene Reste bei der Division durch n. Man beweise, dass jede ganze Zahl genau einmal in der Folge auftritt.

Lösung: Da die n Zahlen $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ lauter verschiedene Reste modulo n haben, bilden sie eine vollständige Restklassenmenge modulo n. Es gibt somit sicher keine zwei gleichen Zahlen $a_i = a_j$ (mit $i < j$) unter den Folgengliedern, da die Menge $\{a_i, a_2, \ldots, a_j\}$ ansonsten modulo j höchstens $j - 1$ verschiedene Elemente enthalten könnte. Ferner gilt für $i < j \leq n$ sicher $|a_i - a_j| \leq n - 1$. Würde nämlich $|a_i - a_j| = m \geq n$ gelten, so würde die Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

zwei Zahlen a_i und a_j enthalten, die kongruent modulo m wären, was laut Vorausssetzung nicht möglich ist.

Nun seien für ein bestimmtes $n \geq 1$ die Indizes $i(n)$ und $j(n)$ diejenigen, für die $a_{i(n)}$ und $a_{j(n)}$ die kleinste bzw. größte Zahl in der Menge $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sind. Aufgrund der eben durchgeführten Überlegungen gilt sicher $|a_{j(n)} - a_{i(n)}| = n - 1$, und die Menge $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ besteht somit genau aus den Zahlen von $a_{i(n)}$ bis $a_{j(n)}$.

Es sei nun x eine beliebige ganze Zahl. Da die Folge unendlich viele negative Glieder hat gibt es sicher ein i, für welches $a_i < x$ gilt. Analog gibt es aber auch unendlich viele positive Folgenglieder, und es existiert somit sicher ein j, für welches $a_j > x$ gilt. Wählen wir aber ein beliebiges $n > \max\{i, j\}$, so enthält die Menge $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sicher alle Zahlen zwischen a_i und a_j, und somit auch x. Wir sehen also, dass alle ganzen Zahlen x in der Folge vorkommen, womit der Beweis abgeschlossen ist. qed

---

Aufgabe 3

Es seien x, y und z positive reelle Zahlen mit $xyz \geq 1$. Man beweise:

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

Lösung: (Prämie für besonders schöne Lösung für einen Teilnehmer aus Moldawien)

Zunächst bemerken wir, dass

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq \frac{x^5 - x^2}{x^3 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)}$$

gilt, da dies gleichweitig ist mit

$$\begin{aligned}
& \frac{(x^5 - x^2)(x^5 + x^3y^2 + x^3z^2) - (x^5 - x^2)(x^5 + y^2 + z^2)}{(x^5 + y^2 + z^2) \cdot x^3 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)} \geq 0 \\
\iff \quad & \frac{x^2 \cdot (x^3 - 1)(x^5 + x^3y^2 + x^3z^2 - x^5 - y^2 - z^2)}{(x^5 + y^2 + z^2) \cdot x^3 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)} \geq 0 \\
\iff \quad & \frac{x^2 \cdot (x^3 - 1)^2(y^2 + z^2)}{(x^5 + y^2 + z^2) \cdot x^3 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)} \geq 0,
\end{aligned}$$

was für $x, y, z \in \mathbf{R}^+$ sicher stimmt. Es folgt somit

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq \frac{x^5 - x^2}{x^3 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{x^2 + y^2 + z^2} \geq \frac{x^2 - yz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

wegen $xyz \geq 1$, und zyklisches Vertauschen der Variablen ergibt somit

$$\begin{aligned}
\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 + z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \quad & \geq \quad \frac{x^2 - yz}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2 - zx}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{z^2 - xy}{x^2 + y^2 + z^2} \\
& = \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx}{x^2 + y^2 + z^2},
\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck ist sicher wegen

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

niemals negativ. qed

Aufgabe 4

Man betrachte die Folge $a_1, a_2, \ldots$ gegeben durch

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen, die zu jedem Glied der Folge teilerfremd sind.

Lösung: Wir beobachten zunächst, dass $a_1 = 10$ und $a_2 = 48$ gilt. Es ist nahe liegend zu vermuten, dass es zu jeder Primzahl p ein n gibt, sodass $p|a_n$ gilt, womit 1 die einzige Zahl mit allen geforderten Eigenschaften wäre. Da dies offensichtlich für die Primzahlen 2 und 3 der Fall ist, bleibt nur zu zeigen, dass wir für Primzahlen größer als 3 immer derartige Indizes n bestimmen können.

Es sei also $p > 3$ eine Primzahl. Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt modulo p

$$2^{p-1} \equiv 1, \; 3^{p-1} \equiv 1 \quad \text{und} \quad 6^{p-1} \equiv 1.$$

Es folgt somit

$$3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} \equiv 6 \iff 6 \cdot 2^{p-2} + 6 \cdot 3^{p-2} + 6 \cdot 6^{p-2} \equiv 6$$

modulo p. Da $p > 3$ gilt, ist p kein Teiler von 6 und es folgt somit

$$2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} \equiv 1 \;\; (mod\; p),$$

womit $a_{p-2} = 2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1$ sicher durch p teilbar ist.

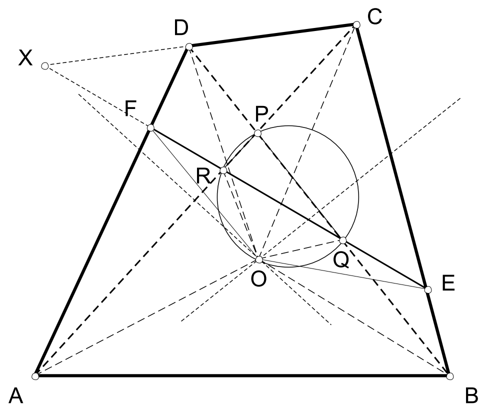
1 ist also die einzige positive ganze Zahl, die zu jedem Glied der Folge teilerfremd ist. qed

---

Aufgabe 5

Gegeben sei ein konvexes Viereck $ABCD$, in dem die Seiten BC und AD gleich lang und nicht parallel sind. Auf den Seiten BC bzw. AD werden die inneren Punkte E bzw. F so gewählt, dass $|BE| = |DF|$ gilt. Die Geraden AC und BD schneiden sich in P, die Geraden BD und EF schneiden sich in Q und die Geraden EF und AC schneiden sich in R. Es werden alle Dreiecke PQR betrachtet, wenn E und F variieren. Man beweise, dass die Umkreise dieser Dreiecke einen von P verschiedenen gemeinsamen Punkt haben.

Lösung:



Es sei O der Schnittpunkt der Streckensymmetralen von AC und BD. Wir wollen zeigen, dass O unabhängig von der Wahl von E und F auf dem Umkreis von PQR liegen muss.

Da O als Schnittpunkt der Streckensymmetralen von AC und BD definiert wurde, gilt $OA = OC$ und $OB = OD$. Da ferner vorausgesetzt wurde, dass auch $DA = BC$ gilt, sind die Dreiecke ODA und OBC congruent, und die Drehung von OBC um den Winkel $\angle BOD$ führt den Punkt B in den Punkt D und den Punkt C in den Punkt A über. da $BE = DF$ vorausgesetzt wird, führt diese Drehung auch E in F über, und es gilt somit $OE = OF$ und $\angle EOF = \angle BOD = \angle COA$. Die gleichschenkeligen Dreiecke EOF, BOD und COA sind also ähnlich.

Nehmen wir nun an, dass AB, CD und EF nicht alle parallel seien. Dann sei o.B.d.A. X der Schnittpunkt von EF und CD. (Falls dieser nicht existiert kann der Schnittpunkt von EF und AB verwendet werden.) Aus dem Satz von Menelaus für die Dreiecke ACD und XCR folgt dann

$$XC \cdot FD \cdot AR = DX \cdot AF \cdot RC \iff \frac{AR}{RC} = \frac{AF}{FD} \cdot \frac{DX}{XC}.$$

Da aus dem Satz von Menelaus für die Dreiecke BCD und XCE auch $XC \cdot DQ \cdot EB = DX \cdot CE \cdot QB$ folgt und $BE = DF$ und $CE = AF$ vorausgesetzt wurde, gilt weiters

$$\frac{AF}{FD} \cdot \frac{DX}{XC} = \frac{CE}{EB} \cdot \frac{DX}{XC} = \frac{DQ}{QB},$$

und somit $AR : RC = DQ : QB$.

Gilt $AB \| EF \| CD$, so ist das Viereck $ABCD$ ein gleichseitiges Trapez, bei dem E und F die Mittelpunkte der Schrägseiten sind. In diesem Fall ist die Beziehung $AR : RC = DQ : QB$ offensichtlich.

Jedenfalls gilt aber $AR : RC = DQ : QB$, und somit sind die Dreiecke BOQ und COR wegen der Ähnlichkeit von BOD und COA ebenfalls ähnlich. Es gilt somit $\angle BQO = \angle CRO$, und $PROQ$ ist somit ein Sehnenviereck, womit gezeigt ist, dass O auf dem Umkreis von PQR liegt.

qed

Aufgabe 6

In einem mathematischen Wettbewerb wurden den Teilnehmern 6 Aufgaben gestellt. Je zwei dieser Aufgaben wurden von mehr als $\frac{2}{5}$ der Teilnehmer gelöst. Kein Teilnehmer löste alle 6 Aufgaben. Man beweise, dass es mindestens 2 Teilnehmer gab, von denen jeder genau 5 Aufgaben gelöst hat.

Lösung: Wir nehmen an, dass es n Teilnehmer des Wettbewerbs gegeben hat und zählen die Anzahl N von Paaren (T, P), wobei P ein Paar von Aufgaben darstellt, die vom Teilnehmer T gelöst wurden. Da jedes der $\binom{6}{2} = 15$ Paare von mehr als $\frac{2}{5}$ der Teilnehmer gelöst wurde gilt sicher

$$N \geq 15 \cdot \frac{2n+1}{5} = 6n + 3.$$

Nun nehmen wir an, dass k Teilnehmer jeweils 5 der Aufgaben gelöst haben. Unter diesen hat jeder $\binom{5}{2} = 10$ Aufgabenpaare gelöst, während die restlichen $n - k$ Teilnehmer jeweils höchstens $\binom{4}{2} = 6$ Aufgabenpaare gelöst haben. Es gilt somit

$$N \leq 10k + 6(n - k) = 6n + 4k.$$

Aus dem Zusammenspiel dieser beiden Abschätzungen erhalten wir unmittelbar

$$6n + 3 \leq 6n + 4k \quad \Rightarrow \quad 3 \leq 4k \quad \Rightarrow \quad k \geq 1.$$

Ist nun $\frac{2n+1}{5}$ keine ganze Zahl (also 5 kein Teiler von $2n+1$), so gibt es sogar mindestens $\frac{2n+2}{5}$ Teilnehmer, die jede Aufgabe gelöst haben, und es gilt somit sogar $N \geq 15 \cdot \frac{2n+2}{5} = 6n + 6$, und daher

$$6n + 4k \geq 6n + 6 \quad \Rightarrow \quad k \geq 2.$$

Gibt es einen Teilnehmer, der weniger als 4 Aufgaben gelöst hat, so hat dieser höchstens $\binom{3}{2} = 3$ Aufgabenpaare gelöst und es gilt

$$N \leq 10k + 6(n - k - 1) + 3 = 6n + 4k - 3,$$

und daher

$$6n + 4k - 3 \geq 6n + 3 \quad \Rightarrow \quad k \geq 2.$$

In beiden Fällen gibt es sicher wie behauptet mindestens 2 Teilnehmer, von denen jeder genau 5 Aufgaben gelöst hat. Es bleibt also nur noch der Fall zu untersuchen, dass $5|(2n+1)$ gilt, und jeder Teilnehmer entweder 4 oder 5 Aufgaben gelöst hat. Nehmen wir in diesem Fall an, es gelte $k = 1$. Wir wollen zeigen, dass dieser Fall nicht eintreten kann, womit der Beweis abgeschlossen ist.

Es sei der einzige Teilnehmer, der alle 5 Aufgaben gelöst hat der "Sieger". Da der Sieger 10 Aufgabenpaare gelöst hat, und jeder andere Teilnehmer 6, gilt in diesem Fall $N = 6n + 4$. Wir bezeichnen ein Aufgabenpaar als "besonders" wenn es von mehr als $\frac{2n+1}{5}$ Teilnehmern gelöst worden ist. Gibt es mehr als ein besonderes Paar von Aufgaben, so gilt

$$N \geq 13 \cdot \frac{2n+1}{5} + 2 \cdot \left(\frac{2n+1}{5} + 1 \right) = 6n + 5,$$

im Widerspruch zu $N = 6n + 4$. Es gibt also höchstens ein besonderes Paar. Gibt es ein besonderes Paar, welches von mehr als $\frac{2n+1}{5} + 1$ Teilnehmern gelöst worden ist, so gilt

$$N \geq 14 \cdot \frac{2n+1}{5} + \left(\frac{2n+1}{5} + 2 \right) = 6n + 5,$$

was wiederum ein Widerspruch ist. Es gibt also höchstens ein besonderes Paar, welches von genau $\frac{2n+1}{5} + 1$ Teilnehmern gelöst wurde.

Nun sei die Aufgabe, die von Sieger nicht gelöst wurde die "schwere" Aufgabe. Wir betrachten die Anzahl M der Paare (T, P) für die die schwere Aufgabe dem Paar P angehört. Es gibt 5 Paare P, der die schwere Aufgabe angehört, und jedes dieser Paare wurde entweder von $\frac{2n+1}{5}$ oder von $\frac{2n+1}{5} + 1$ Teilnehmern gelöst. Es gilt also entweder $M = 2n+1$ oder $M = 2n+2$, wobei letzteres nur der Fall sein kann, wenn es ein besonderes Aufgabenpaar gibt, dem die schwere Aufgabe auch angehört. Haben nun m Teilnehmer die schwere Aufgabe gelöst, so hat jeder von ihnen 3 weitere Aufgaben gelöst, und somit 3 Aufgabenpaare, die die schwere Aufgabe enthalten. Es gilt also $M = 3m$, und somit sicher $2n + 1 \equiv 0$ oder 2 modulo 3.

Schließlich wählen wir eine beliebige Aufgabe p, die nicht die schwere Aufgabe ist und betrachten die Anzahl L der Paare (T, P) für welche p dem Paar P angehört. Es ist sicher möglich p derart zu wählen, dass es nicht dem besonderen Paar angehört, sofern es ein solches überhaupt gibt. Dann gibt es 5 Paare von Aufgaben, die p enthalten, wovon jedes von genau $\frac{2n+1}{5}$ Teilnehmern gelöst wurde, und es gilt somit $L = 2n + 1$. Ist aber l die Anzahl von Teilnehmern (außer dem Sieger), die p gelöst haben, so gilt $L = 3l + 4$, da der Sieger 4 Paare die p enthalten gelöst hat, und jeder der l Teilnehmern jeweils 3. Daraus folgt aber $2n + 1 \equiv 1$ modulo 3, was einen Widerspruch ergibt.

Wir sehen also, dass wir die Annahme, genau ein Teilnehmer hätte 5 Aufgaben gelöst, fallen lassen müssen, womit gezeigt ist, dass es mindestens zwei derartige Teilnehmer geben muss.

qed