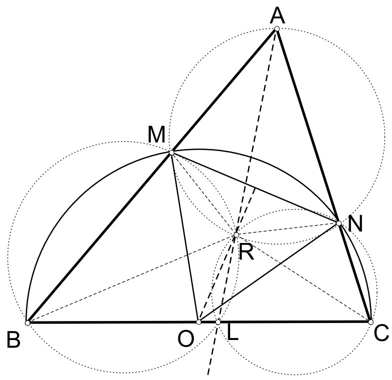
Aufgabe 1

Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Der Kreis mit dem Durchmesser BC schneidet die Seiten AB und AC in M bzw. N. Der Mittelpunkt der Seite BC sei O. Die Winkelhalbierenden der Winkel $\angle BAC$ und $\angle MON$ schneiden sich in R.

Man beweise, dass die Umkreise der Dreiecke BMR und CNR einen gemeinsamen Punkt haben, der auf der Seite BC liegt.

Lösung: Es sei L der Schnittpunkt von AR mit BC. Wir zeigen, dass L sowohl auf dem Umkreis von $\triangle BMR$ als auch auf dem Umkreis von $\triangle CNR$ liegt.



Da O der Mittelpunkt des Kreises durch B, C, M und N ist, gilt sicher

$$OM = ON.$$

Das Dreieck $\triangle OMN$ ist also gleichschenkelig und die Winkelsymmetrale von $\angle MON$ ist somit gleich der Streckensymmetrale der Dreiecksbasis MN. Im Dreieck AMN schneiden sich somit die Winkelsymmetrale von $\angle MAN = \angle BAC$ und die Seitensymmetrale von MN im Punkt R, der also nach dem Südpolsatz auf dem Umkreis von $\triangle AMN$ liegen muss. $AMRN$ ist also ein Sehnenviereck.

Nach Voraussetzung ist auch $BCNM$ ein Sehnenviereck, und es gilt somit

$$\angle ABC = 180^o - \angle MNC = \angle ANM,$$

und

$$\angle ACB = 180^o - \angle NMB = \angle AMN.$$

Um zu zeigen, dass L auf dem Umkreis von $\triangle BMR$ liegt, genügt es zu zeigen, dass $\angle ARM = \angle MBL$ gilt (da in diesem Fall im Viereck $BLRM$ die gegenüberliegenden Winkel $\angle MBL$ und $\angle MRL$ die Summe 180^o haben, und $BLRM$ daher ein Sehnenviereck sein muss). Dies ist aber sicher der Fall, da $AMRN$ ein Sehnenviereck ist. Aus dieser Tatsache folgt nämlich unmittelbar

$$\angle ARM = \angle ANM,$$

und da wir schon wissen, dass $\angle ANM = \angle ABC = \angle MBL$ gilt, folgt somit

$$\angle ARM = \angle MBL.$$

$BLRM$ ist somit ein Sehnenviereck. Analog sieht man, dass auch $CLRN$ ein Sehnenviereck ist, und die Umkreise von $\triangle BMR$ und $\triangle CNR$ schneiden sich somit in L. qed

Aufgabe 2

Man bestimme alle Polynome $P(x)$ mit reellen Koeffizienten, die die Gleichung

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

für alle reellen Zahlen a,b,c mit $ab+bc+ca=0$ erfüllen.

Lösung: Wir zeigen, dass genau die Polynome $P(x)$ der Gestalt

$$P(x)=\alpha x^2+\beta x^4 \quad \text{mit} \quad \alpha,\beta \in \mathbf{R}$$

die gegebenen Bedingungen erfüllen.

Es sei zuerst $a=b=0$. In diesem Fall gilt sicher $ab+bc+ca=0$, und die Polynomialgleichung lautet

$$\begin{aligned} P(0-0)+P(0-c)+P(c-0)=2P(0+0+c) \quad &\Longleftrightarrow \quad P(0)+P(-c)+P(c)=2P(c) \\ &\Longleftrightarrow \quad P(0)+P(-c)=P(c). \end{aligned}$$

Setzt man besonders auch $c=0$, so erhalten wir die Bedingung

$$P(0)+P(0)=P(0) \iff P(0)=0.$$

Nehmen wir an, dass $P(x)$ in der Form

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots$$

dargestellt werden kann, so bedeutet dies, dass jedenfalls $P(0)=a_0=0$ gelten muss.

Aus der Bedingung $P(0)+P(-c)=P(c)$ erhalten wir somit $P(-c)=P(c)$. Koeffizientenvergleich von $P(c)$ und $P(-c)$ zeigt uns, dass die Koeffizienten aller ungeraden Potenzen von x in $P(x)$ gleich 0 sein müssen, und es gilt somit

$$P(x)=a_2x^2+a_4x^4+a_6x^6+\ldots.$$

Nun möchten wir im nächsten Schritt zeigen, dass der Grad von $P(x)$ höchstens 4 sein kann. Zu diesem Zweck betrachten wir die besonderen Werte

$$a=uv, \quad b=(1-u)v \quad \text{und} \quad c=(u^2-u)v,$$

für die jedenfalls

$$ab+bc+ca=(a+b)c+ab=v(u^2-u)v+uv(1-u)v=0$$

gilt. Setzen wir diese Werte in der Polynomialgleichung ein, erhalten wir die Bedingung

$$\begin{aligned} & P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c) \\ \Longleftrightarrow \quad & P((2u-1)v)+P((1-u^2)v)+P((u^2-2u)v)=2P((u^2-u+1)v) \end{aligned}$$

für alle reellen Werte von u und v. Dies kann man als Polynomialgleichung vom Grad $2n$ in der Variablen v betrachten. Da dies für alle reellen Werte von v gelten muss, erhalten wir als Bedingung für die Leitkoeffizienten:

$$(2u-1)^{2n}+(1-u^2)^{2n}+(u^2-2u)^{2n}=2(u^2-u+1)^{2n}.$$

Setzen wir für u den besonderen Wert $u=-2$ ein, erhalten wir

$$5^{2n}+3^{2n}+8^{2n}=2\cdot 7^{2n}.$$

Dies bedeutet speziell unter Vernachlässigung der ersten zwei Summanden $8^{2n} < 2 \cdot 7^{2n}$, was aber für $n \geq 3$ nicht gelten kann. Für $n = 3$ gilt nämlich schon

$$8^{2\cdot 3} = 2^{18} > 2^8 \cdot 1000 = 256000 > 235298 = 2 \cdot 7^{2\cdot 3},$$

und wegen $8^2 > 7^2$ gilt somit sicher für $n \geq 3$ die Ungleichung $8^{2n} > 2 \cdot 7^{2n}$. Wir sehen, dass $n \leq 2$ für den Grad $2n$ von $P(x)$ gelten muss.

Es bleibt nun nur mehr zu zeigen, dass tatsächlich jedes Polynom $P(x) = a_2x^2 + a_4x^4$ die Bedingungen erfüllt.

Zunächst ist es klar, dass jede Linearkombination von Lösungen der gegebenen Polynomialgleichung ebenfalls eine Lösung ist, da aus

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a) = 2P(a+b+c) \quad \text{und} \quad Q(a-b)+Q(b-c)+Q(c-a) = 2Q(a+b+c)$$

sicher für $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

$$(\alpha P + \beta Q)(a-b) + (\alpha P + \beta Q)(b-c) + (\alpha P + \beta Q)(c-a) = 2(\alpha P + \beta Q)(a+b+c)$$

gilt. Es genügt also zu zeigen, dass die Polynomialbedingung für $P(x) = x^2$ und $Q(x) = x^4$ erfüllt ist. Für $P(x) = x^2$ gilt

$$\begin{aligned} & P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) - 2P(a+b+c) \\ = \; & (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 - 2(a+b+c)^2 \\ = \; & -6(ab+bc+ca) \\ = \; & 0, \end{aligned}$$

wie gefordert. Um die Gültigkeit für $Q(x) = x^4$ zu zeigen, betrachten wir den Ausdruck

$$Q(a-b) + Q(b-c) + Q(c-a) = (a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4.$$

Um die Schreibweise etwas zu vereinfachen setzen wir $x := a-b$, $y := b-c$ und $z := c-a$. Wir haben soeben gezeigt, dass $x^2 + y^2 + z^2 = 2(a+b+c)^2$ gilt, und somit haben wir

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &= (x^2+y^2+z^2)^2 - 2((xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2) \\ &= 4(a+b+c)^4 - 2((xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2). \end{aligned}$$

Wegen $x + y + z = (a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$ und

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2(xy+yz+zx) = -(x^2+y^2+z^2) \\ &\Longleftrightarrow \quad xy+yz+zx = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) = -(a+b+c)^2 \end{aligned}$$

gilt aber auch

$$(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 = (xy+yz+zx)^2 - 2xyz(x+y+z) = (a+b+c)^4,$$

und wir haben somit zusammenfassend

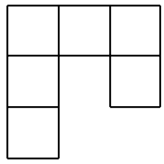
$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &= 4(a+b+c)^4 - 2((xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2) \\ &= 4(a+b+c)^4 - 2(a+b+c)^4 \\ &= 2(a+b+c)^4 \\ &= 2Q(a+b+c), \end{aligned}$$

und $Q(x) = x^4$ erfüllt somit auch die Polynomialbedingung. Jede Linearkombination von $P(x)$ und $Q(x)$ ist also Lösung der gegebenen Polynomialgleichung, wie behauptet. qed

---

Aufgabe 3

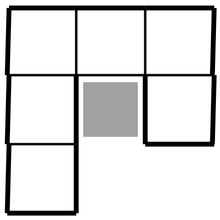
Ein *Haken* sei eine Figur, die aus sechs Einheitsquadraten besteht, wie sie in der Abbildung



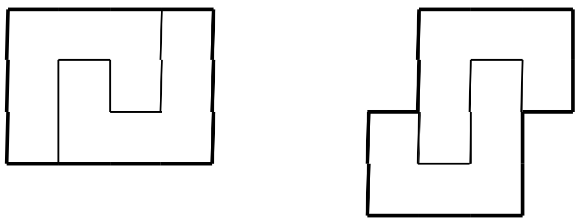
dargestellt ist oder aus dieser Figur durch Drehungen und Spiegelungen erhalten werden kann. Man bestimme alle $m \times n$-Rechtecke, die mit Haken überdeckt werden können, so dass ein solches Rechteck

- ohne Löcher oder Überlappungen übedeckt wird und
- keine Fläche außerhalb des Rechtecks überdeckt wird.

Lösung: In jeder Rechtecksüberdeckung der geforderten Art muss von jedem Haken das freie "innere" Quadrat wiederum von einem anderen Haken überdeckt sein.

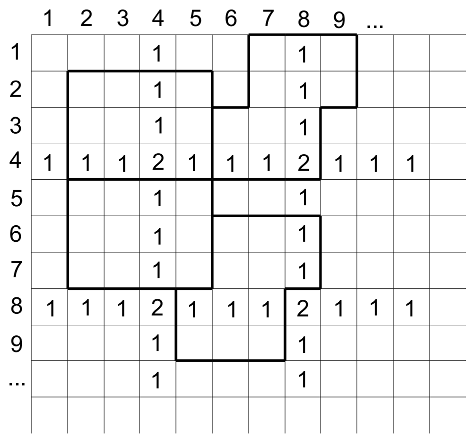


Dies ist nur auf die zwei abgebildeten Arten möglich.



In beiden Fällen überdeckt jeder Haken jeweils das freie "innere" Feld des jeweils anderen. In jeder möglichen Rechtecksüberdeckung treten die Haken somit nur paarweise auf und bilden "Bausteine" der abgebildeten Arten. Wir bezeichnen diese ihrer Form nach als "Rechtecksbaustein" bzw. "S-Baustein". Jeder Baustein hat die Fläche 12 (wobei jedes der kleinen Quadrate als Einheitsquadrat aufgefasst wird), und die Fläche eine bedeckbaren Rechtecks muss somit durch 12 teilbar sein. Es gilt sicher $12|mn$.

Wir können nun zeigen, dass entweder $4|m$ oder $4|n$ gelten muss. Ist dies nämlich nicht der Fall, so sind m und n wegen $4|mn$ beide Gerade. Beschriften wir das $m \times n$ Rechteck wie abgebildet so, dass wir in jedes Feld einer durch 4 teilbaren Zeile bzw. Spalte die Zahl 1 schreiben, und in Felder, die sowohl in durch 4 teilbaren Spalten als auch Zeilen liegen die Zahl 2, so überdeckt jeder Baustein Zahlen mit einer ungeraden Gesamtsumme.



Man kann leicht überprufen, dass die Summe der Zahlen, die von einem Rechtecksbaustein überdeckt werden immer 3 oder 7 ist, und die Summe der Zahlen, die von einem S-Baustein überdeckt werden immer 5 oder 7 ist. (Einige mögliche Lagen der Bausteine sind in der Figur angedeutet.) Da nun sowohl m als auch n gerade Zahlen sind, ist aber die Summe aller Zahlen im Rechteck sicher gerade. Dies bedeutet, dass die Anzahl der Bausteine gerade sein muss, da jeder Baustein Zahlen mit einer ungeraden Summe bedeckt.

Da nun jeder Baustein die Fläche 12 hat, und es eine gerade Anzahl von Bausteinen gibt, ist die Fläche des Rechtecks sicher durch 24 teilbar. Es gilt also $24|mn$, und somit sicher $8|mn$. Dies widerspricht aber der Annahme, dass weder $4|m$ noch $4|n$ gilt.

Nun wissen wir, dass entweder m oder n durch 4 teilbar sein muss, und da $12|mn$ gilt, muss auch eine der beiden Zahlen m oder n durch 3 teilbar sein. Wir beobachten, dass wedre m noch n gleich 1, 2 oder 5 sein kann, da in diesen Fällen offensichtlich keine überdeckende Platzierung der Bausteine auf dem Rechteck möglich ist.

Nun sind aber alle $m \times n$ Rechtecke, deren Seitenlängen die Eigenschaft haben, dass eine der beiden Zahlen m und n durch 4 teilbar ist, eine der beiden durch 3 teilbar ist, und $m, n \notin \{1, 2, 5\}$ durch Bausteine überdeckbar, und zwar sogar immer durch Rechtecksbausteine.

Gilt $3|m$ und $4|n$ (oder umgekehrt), so ist dies offensichtlich möglich. Gilt (o.B.d.A.) $12|m$, so ist jeder Wert von $n \neq 1, 2, 5$ darstellbar in der Form $n = a \cdot 3 + b \cdot 4$. Das $m \times n$ Rechteck ist also zerlegbar in a $m \times 3$ Rechtecke und b $m \times 4$ Rechtecke, die wiederum wegen $12|m$ sicher in 3×4 Rechtecke zerlegbar sind. Die überdeckbaren Rechtecke sind also genau die mit der beschriebenen Eigenschaft. qed

---

Aufgabe 4

Es sei n eine ganze Zahl mit $n \geq 3$. Ferner seien $t_1, t_2, \ldots, t_n$ positive reelle Zahlen mit

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \ldots + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n} \right).$$

Man beweise, dass t_i, t_j, t_k die Seitenlängen eines Dreiecks sind für alle i, j, k mit $1 \leq i < j < k \leq n$.

Lösung: Aufgrund der Symmetrie der Angabe genügt es zu zeigen, dass $t_1 < t_2 + t_3$ gilt. Zunächst gilt für die rechte Seite der gegebenen Ungleichung

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} &= n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \right) \\ &= n + t_1 \cdot \left(\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \right) + \frac{1}{t_1} \cdot (t_2 + t_3) + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ (i,j) \neq (1,2),(1,3)}} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \right). \end{aligned}$$

Aufgrund der AM-GM Ungleichung gelten aber die Beziehungen

$$\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \geq \frac{2}{\sqrt{t_2 t_3}}, \qquad t_2 + t_3 \geq 2\sqrt{t_2 t_3} \quad \text{und} \quad \frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \geq 2 \quad \text{für alle } i, j.$$

Führen wir also zur Vereinfachung der Schreibweise die Variable

$$a = \frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}} > 0$$

ein, folgt aus der Voraussetzung

$$\begin{aligned} n^2+1 &> \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} \\ &= n + t_1 \cdot \left(\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right) + \frac{1}{t_1}\cdot(t_2+t_3) + \sum_{\substack{1\le i<j\le n \\ (i,j)\neq(1,2),(1,3)}} \left(\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\right) \\ &\geq n + 2\cdot\frac{t_1}{\sqrt{t_2t_3}} + 2\cdot\frac{\sqrt{t_2t_3}}{t_1} + 2\cdot\left(\binom{n}{2}-2\right) \\ &= n + 2a + \frac{2}{a} + 2\cdot\left(\frac{n(n-1)}{2}-2\right) \\ &= 2a + \frac{2}{a} + n^2 - 4. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} n^2+1 > 2a+\frac{2}{a}+n^2-4 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2a+\frac{2}{a}-5<0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2a^2-5a+2<0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (2a-1)(a-2)<0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}<a<2, \end{aligned}$$

und speziell erhalten wir mit Hilfe der AM-GM Ungleichung

$$a = \frac{t_1}{\sqrt{t_2t_3}} < 2 \Rightarrow t_1 < 2\cdot\sqrt{t_2t_3} \leq t_2+t_3.$$

qed

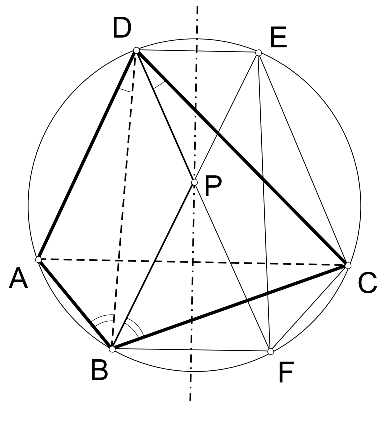
Aufgabe 5

In einem konvexen Viereck $ABCD$ halbiere die Diagonale BD weder den Winkel $\angle ABC$ noch den Winkel $\angle CDA$. Es sei P ein Punkt im Inneren des Vierecks $ABCD$, der die Gleichungen

$$\angle PBC = \angle DBA \quad \text{und} \quad \angle PDC = \angle BDA$$

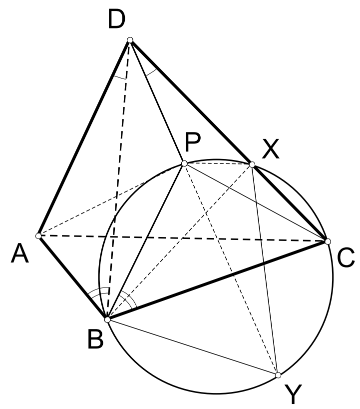
erfüllt. Man beweise, dass das Viereck $ABCD$ dann und nur dann ein Sehnenviereck ist, wenn $\overline{AP} = \overline{CP}$.

Lösung: Wir nehmen zuerst an, dass $ABCD$ ein Sehnenviereck ist und wollen beweisen, dass in diesem Fall $PA = PC$ gelten muss. Es seien E und F die jeweils zweiten Schnittpunkte von BP bzw. DP mit dem Umkreis k von $ABCD$.



Wegen
$$\angle BDA = \angle PDC = \angle FDC$$
sind die Strecken BA und FC aufgrund des Peripheriewinkelsatzes gleich lang. Dasselbe gilt analog auch für die Strecken DA und EC wegen
$$\angle DBA = \angle PBC = \angle EBC.$$
Wegen $BA = FC$ gilt sicher $BF \| AC$ und analog gilt wegen $DA = EC$ auch sicher $DE \| AC$. Es gilt somit auch $BF \| DE$, und $BFED$ ist somit ein gleichschenkeliges Trapez (oder ein Rechteck) mit Diagonalenschnittpunkt P. Der Diagonalenschnittpunkt ist aber sicher auf der gemeinsamen Streckensymmetrale der Parallelseiten BF und DE, die auch sicher durch den Mittelpunkt von k geht, und auch normal zu AC steht. Diese Gerade ist also auch die Streckensymmetrale von AC, und es gilt somit sicher $PA = PC$. qed

Nun gelte $PA = PC$. Wir möchten beweisen, dass in diesem Fall $ABCD$ ein Sehnenviereck sein muss. Es seien X und Y die Schnittpunkte von CD bzw. DP mit dem Umkreis k von $\triangle BCP$.



Zunächst bemerken wir, dass
$$\triangle ADB \sim \triangle PDX$$
gilt, da $\angle ADB = \angle PDX$ $(= \angle PDC)$ gilt und
$$\angle DXP = 180^o - \angle CXP = \angle CBP = \angle ABD.$$
Damit sind aber auch die Dreiecke $\triangle ADP$ und $\triangle BDX$ ähnlich, da $\angle ADP = \angle BDX$ $(= \angle BDC)$ und
$$\frac{AD}{BD} = \frac{PD}{XD}$$
gelten. Es folgt somit
$$\frac{BX}{AP} = \frac{BD}{AD} = \frac{XD}{PD}.$$
Weiters gilt $\triangle DPC \sim \triangle DXY$, da sie den Winkel $\angle PDC = \angle YDX$ gemeinsam haben und $\angle PCX = \angle PYX = \angle DYX$ aus dem Peripheriewinkelsatz folgt. Daraus erhalten wir auch
$$\frac{YX}{CP} = \frac{XD}{PD},$$
und somit
$$\frac{YX}{CP} = \frac{XD}{PD} = \frac{BX}{AP}.$$

Da $AP = CP$ gilt, folgt somit $BX = YX$, und daher auch

$$\begin{aligned} \angle DCB &= \angle XCB = \angle XYB \\ &= \angle XBY = \angle XPY \\ &= \angle PDX + \angle PXD \\ &= \angle ADB + \angle ABD \\ &= 180^o - \angle BAD, \end{aligned}$$

und $ABCD$ ist somit ein Sehnenviereck. qed

Aufgabe 6

Wir nennen eine positive ganze Zahl *alternierend*, wenn von je zwei aufeinanderfolgenden Ziffern im Dezimalsystem eine gerade und eine ungerade ist.

Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, die ein Vielfaches haben, das alternierend ist.

Lösung: Wir bemerken zunächst, dass jede durch 20 teilbare Zahl die letzte Ziffer 0 besitzt. Da die vorletzte Ziffer einer solchen Zahl gerade sein muss, und jedes Vielfache einer durch 20 teilbaren Zahl ebenfalls durch 20 teilbar sein muss, besitzten die durch 20 teilbaren Zahlen sicher keine alternierenden Vielfache.

Wir zeigen aber im Folgenden, dass jede nicht durch 20 teilbare Zahl n sehr wohl derartige Vielfache besitzt. Wegen $20 = 2^2 \cdot 5$ werden in dieser Überlegung die Potenzen von 2 und 5 sicher eine gewisse Rolle spielen. Es ist also nahe liegend, den Beweis in mehrere Schritte zu zerlegen, wobei nach diesen Potenzen von 2 und 5 unterschieden wird. Als erstes betrachten wir die Zweierpotenzen und zeigen, dass jede Zahl $n = 2^k$ ein alternierendes Vielfaches mit einer geraden Ziffernanzahl besitzt.

Zu diesem Zweck konstruieren wir eine Folge $\langle a_n \rangle$ von Ziffern, sodass

$$a_n \equiv n + 1 \ (mod\ 2), \quad 2^{2n-1} \| \overline{a_{2n-1} \dots a_1} \quad \text{und} \quad 2^{2n+1} \| \overline{a_{2n} a_{2n-1} \dots a_1}$$

für alle $n \geq 1$ gilt. (Das Symbol "$\|$" bedeutet hier wie üblich, dass die angegebene Potenz die höchste ist, die diese Zahl teilt.) Eine solche Folge erhalten wir auf folgende Art.

Es seien zunächst $a_1 = 2$ und $a_2 = 7$. Nehmen wir an, dass die Folge bereits bis zum Glied a_{2n} konstruiert wäre. Wir setzen $a_{2n+1} := 4$.

Für dieses Folgenglied gilt offensichtlich $a_{2n+1} \equiv 2n + 2 \equiv 0 \ (mod\ 2)$. Ferner gilt

$$2^{2n+1} \| \overline{a_{2n+1} a_{2n} \dots a_1} = 4 \cdot 10^{2n} + \overline{a_{2n} \dots a_1},$$

da aufgrund der induktiven Konstruktion der Folge sicher

$$2^{2n+1} \| \overline{a_{2n} a_{2n-1} \dots a_1}$$

gilt, ebenso wie

$$2^{2n+2} \| 4 \cdot 10^{2n}.$$

Wir können also die ungerade Zahl A eindeutig bestimmen, sodass $\overline{a_{2n+1} \dots a_1} = 2^{2n+1} \cdot A$ gilt. Um nun das nächste Folgenglied a_{2n+2} geeignet wählen zu können, beachten wir, dass a_{2n+2} ungerade sein muss, mit

$$2^{2n+3} \| \overline{a_{2n+2} a_{2n+1} \dots a_1} = a_{2n+2} \cdot 10^{2n+1} + \overline{a_{2n+1} \dots a_1} = 2^{2n+1} \cdot (a_{2n+2} \cdot 5^{2n+1} + A).$$

Damit dies gilt, muss wegen $5^2 = 25 \equiv 1\ (mod\ 8) \Rightarrow 5^{2n} \equiv 1\ (mod\ 8)$

$$5 \cdot a_{2n+2} + A \equiv 4\ (mod\ 8)$$

gelten. Da $ggT(5,8) = 1$ gilt, ist diese Gleichung in den Restklassen modulo 8 eindeutig lösbar, und diese Lösung ist sicher ungerade, da 5 und A beide ungerade sind. Es existiert also sicher eine Wahl von $a_{2n+2} \in \{1,3,5,7\}$ die den Bedingungen genügt.

Da also für die so konstruierte Folge $\langle a_n \rangle$ für alle $n \geq 1$ sicher $2^{2n+1} \| \overline{a_{2n} \dots a_1}$ gilt, hat jede Zahl der Form 2^{2n+1} (und somit auch der Form 2^{2n}) ein alternierendes Vielfaches mit einer geraden Ziffernanzahl. Der erste Schritt des Beweises ist also abgeschlossen.

Als Nächstes zeigen wir, dass es auch jede Zahl $n = 2 \cdot 5^k$ ein alternierendes Vielfaches mit gerader Ziffernanzahl besitzt. Wieder konstruieren wir eine Folge $\langle b_n \rangle$, diesmal mit den Eigenschaften

$$b_n \equiv n + 1\ (mod\ 2) \quad \text{und} \quad (2 \cdot 5^n) | \overline{b_n \dots b_1}$$

für alle $n \geq 1$. Wir beginnen mit $b_1 = 0$ und $b_2 = 5$. Nehmen wir an, dass die Folge bereits bis zum Glied b_n konstruiert wäre. Es gilt dann $b^\ell \| \overline{b_n \dots b_1}$ mit $\ell \geq n$, und es gibt eine (nicht durch 5 teilbare) Zahl B mit

$$\overline{b_n \dots b_1} = 5^\ell \cdot B.$$

Um das nächste Folgenglied b_{n+1} zu wählen, muss $b_{n+1} \equiv n + 2\ (mod\ 2)$ gelten, sowie

$$5^{n+1} | \overline{b_{n+1} b_n \dots b_1} = b_{n+1} \cdot 10^n + \overline{b_n \dots b_1} = 5^n \cdot (b_{n+1} \cdot 2^n + 5^{\ell - n} \cdot B).$$

Letzteres ist sicher der Fall, wenn der Ausdruck $b_{n+1} \cdot 2^n + B$ durch 5 teilbar ist. Da 2^n und 5 teilerfremd sind, hat das System von Simultankongruenzen

$$b_{n+1} \equiv n + 2\ (mod\ 2) \quad \text{und} \quad b_{n+1} \cdot 2^n + B \equiv 0\ (mod\ 5)$$

nach dem Chinesischen Restsatz sicher eine Lösung modulo 10, die als Ziffer b_{n+1} ausgewählt werden kann.

Wir sehen also, dass jede Zahl der Form $2 \cdot 5^n$ ein alternierendes Vielfaches mit einer geraden Ziffernanzahl besitzt, da aus $2 \cdot 5^{2k} | \overline{b_{2k} \dots b_1}$ auch $2 \cdot 5^{2k-1} | \overline{b_{2k} \dots b_1}$ folgt. Offensichtlich folgt aus $2 \cdot 5^n | \overline{b_n \dots b_1}$ auch $5^n | \overline{b_n \dots b_1}$, und es hat also auch jede Zahl 5^n ein alternierendes Vielfaches mit gerader Ziffernanzahl. Dies schließt den zweiten Schritt des Beweises ab.

Wir betrachten nun allgemeine Zahlen der Gestalt $n = 2^\alpha 5^\beta k$, wobei k und 10 teilerfremd sind. Wenn n nicht durch 20 teilbar ist, ist die Zahl $2^\alpha 5^\beta$ entweder eine Zweierpotenz, eine Fünferpotenz, oder von der Gestalt $2 \cdot 5^k$. In jedem Fall wissen wir, dass diese Zahl ein alternierendes Vielfaches M mit gerader Ziffernanzahl besitzt. Es sei $2m$ die Anzahl der Ziffern von M.

Offensichtlich sind alle Zahlen der Gestalt

$$\overline{MM \dots M} = M \cdot (1 + 10^{2m} + \dots + 10^{2m(\ell-1)}) = M \cdot C_\ell$$

alternierende Vielfache von $2^\alpha 5^\beta$. Nun muss es aber einen Index ℓ geben, sodass $k | C_\ell$ gilt. Betrachten wir nämlich alle Zahlen C_ℓ für $\ell = 1, 2, \dots k + 1$, so muss es nach SFS unter ihnen zwei geben, die derselben Restklasse modulo k angehören. Sei $C_{\ell_1} \equiv C_{\ell_2}\ (mod\ k)$ mit $\ell_1 < \ell_2$. Dann ist k sicher ein Teiler der Differenz

$$C_{\ell_2} - C_{\ell_1} = C_{\ell_2 - \ell_1} \cdot 10^{2m\ell_1},$$

und da k und 10 teilerfrend sind, ist k somit auch ein Teiler von $C_{\ell_2 - \ell_1}$. Es ist also sicher die Zahl $M \cdot C_{\ell_2 - \ell_1}$ von der Form $\overline{MM \dots M}$, und diese Zahl ist ein alternierendes Vielfaches der allgemeinen, nicht durch 20 teilbaren Zahl $2^\alpha 5^\beta k$, womit der Beweis abgeschlossen ist. qed