Aufgabe 1

Es sei A eine Teilmenge der Menge $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$ mit genau 101 Elementen. Man beweise, dass Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ ind S existieren, so dass die Mengen

$$A_j = \{x + t_j | x \in A\} \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \ldots, 100$$

paarweise disjunkt sind!

Lösung:

Es sei

$$D = \{x - y | x, y \in A\}.$$

Diese Menge enthält höchstens $101 \cdot 100 + 1$ Elemente, da x und y aus A beliebig mit $x \neq y$ gewählt werden können und $x - x = 0$ für alle $x \in A$ gilt.

Zwei Mengen $A + t_i$ und $A + t_j$ haben genau dann einen nicht-leeren Durchschnitt, wenn $t_i - t_j \in D$ gilt, da in diesem Fall

$$x_m + t_i = x_n + t_j \quad \Leftrightarrow \quad t_i - t_j = x_n - x_m \in A$$

gilt. Die 100 Werte von t_i müssen also so gewählt werden, dass ihre Differenzen je nicht in D liegen.

Wir können nun induktiv unsere 100 Zahlen t_i auswählen. t_1 sei zunächst eine beliebige Zahl aus $S \setminus D$.

Seien nun die Zahlen t_i mit $1 \leq i \leq k$ bereits ausgewählt, sodass alle A_i elementefrend sind. Jedes t_i verhindert bei der Auswahl von t_{k+1} die Wahl aller Elemente aus $t_i + D$. Jede solche Menge hat 10101 Elemente, und die k bereits gewählten t_i verhindern also die Wahl von höchstens $k \cdot 10101$ der Zahlen aus S für t_{k+1}. Bei $k = 99$ haben wir noch sicher

$$k \cdot 10101 = 999999,$$

und so kann sicher noch ein t_{100} ausgewählt werden. qed

Aufgabe 2

Man bestimme alle Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen, so dass

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

eine positive ganze Zahl ist!

Lösung: Es sei (a, b) ein Paar positiver ganzer Zahlen, die die Bedingung erfüllen. Wegen

$$k = \frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} > 0$$

gilt

$$2ab^2 - b^3 + 1 > 0 \Rightarrow a > \frac{b}{2} - \frac{1}{2b^2},$$

und somit

$$a \geq \frac{b}{2}.$$

Wegen $k \geq 1$ gilt auch

$$a^2 \geq b^2(2a-b)+1,$$

und somit

$$a^2 > b^2(2a-b) \geq 0,$$

und es folgt somit sicher

$$a > b \quad \text{für} \quad 2a-b>0$$

oder

$$2a = b \quad \text{für} \quad 2a-b=0.$$

Wir fassen nun die Gleichung

$$k = \frac{a^2}{2ab^2-b^3+1} \quad \Leftrightarrow \quad a^2-2ab^2k+k(b^3-1)=0$$

als quadratische Gleichung in der Variablen a bei vorgegebenen positiven ganzzahligen Werten von b und k auf, und es seien a_1 und a_2 dabei die Lösungen. Ist eine dieser beiden Lösungen ganzzahlig, so is es wegen

$$a_1+a_2 = 2kb^2$$

die andere auch. Sei o.B.d.A. $a_1 \geq a_2$. Wegen $a_1+a_2=2kb^2$ gilt dann $a_1 \geq kb^2$, und wegen $a_1a_2 = k(b^3-1)$ gilt auch

$$0 \leq a_2 = \frac{k(b^3-1)}{a_1} \leq \frac{k(b^3-1)}{kb^2} < b.$$

Da (a_2, b) ein ganzzahliges k liefert, wissen wir aber schon, dass für $a_2 > 0$ entweder $a_2 > b$ oder $2a_2 = b$ gelten muss. Es folgt somit entweder $a_2 = 0$ oder $a_2 = \frac{b}{2}$.
Wenn $a_2 = 0$ gilt, folgt auch

$$a_1a_2 = 0 = k(b^3-1),$$

und somit $b=1$ und

$$a_1+a_2 = 2kb^2 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2k.$$

Wir erhalten in diesem Fall also als mögliche Werte für (a,b) alle Paare der gestalt $(2l,1)$ mit $l \in \mathbf{Z}^+$.
Wenn $a_2 = \frac{b}{2}$ gilt, ist b gerade und es gilt

$$k = \frac{\frac{b^2}{4}}{2\cdot\frac{b}{2}\cdot b^2-b^3+1} = \frac{b^2}{4}$$

und

$$\begin{aligned} a_1a_2 = k(b^3-1) \quad &\Leftrightarrow \quad a_1 \cdot \frac{b}{2} = \frac{b^2}{4}\cdot(b^3-1) \\ &\Leftrightarrow \quad a_1 = \frac{b^4}{2} - \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

In diesem Fall erhalten wir also, da b gerade sein muss, als mögliche Werte für (a,b) für die a_2 alle Paare der Gestalt $(l,2l)$ mit $l \in \mathbf{Z}^+$ und für die a_1 alle Paare der Gestalt $(8l^4-l, 2l)$ mit $l \in \mathbf{Z}^+$.

Zusammenfassend sind alle möglichen Paare (a, b), die ein ganzzahliges $k > 0$ ergeben für ein $l \in \mathbf{Z}^+$ von der Gestalt

$$(2l, 1), \quad (l, 2l) \quad \text{oder} \quad (8l^4 - l, 2l).$$

qed

Aufgabe 3

Gegeben sei ein konvexes Sechseck, in dem je zwei gegenüberliegende Seiten die folgende Eigenschaft haben:

Der Abstand ihrer Mittelpunkte ist das $\frac{\sqrt{3}}{2}$-fache der Summe ihrer Längen.

Man beweise, dass alle Winkel des Sechsecks gleich groß sind!

(Das Sechseck $ABCDEF$ hat die 3 Paare gegeüberliegender Seiten: AB und DE, BC und EF, CD und FA.)

Lösung:

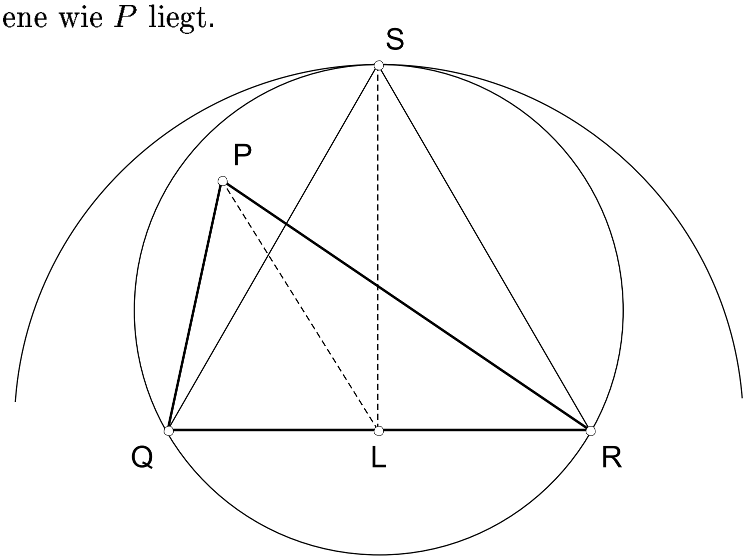
Wir zeigen zunächst die Gültigkeit des folgenden Lemmas:

Lemma: Es sei ein Dreieck $\triangle PQR$ mit $\angle QPR \geq 60^o$ gegeben. L sei der Mittelpunkt von QR. Dann gilt

$$PL \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot QR,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $\triangle PQR$ ein gleichseitiges Dreieck ist.

Beweis des Lemmas: Es sei S der Punkt mit $QS = RS = QR$, der in derselben von QR begrenzten Halbebene wie P liegt.

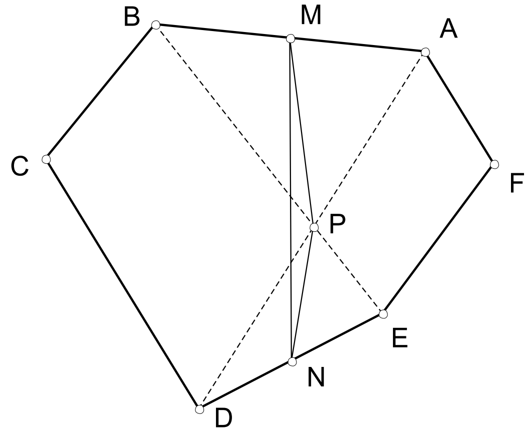


Nach dem Peripheriewinkelsatz liegt P wegen $\angle QPR \geq 60^o$ im Inneren oder am Rand des Umkreises von $\triangle QRS$. Dieser Kreis liegt (mit Ausnahme des Beruhrpunkts S) zur Gänze im Inneren des Kreises mit Mittelpunkt in L und Radius $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot QR = LS$, und PL ist somit nicht größer als LS, und es gilt

$$PL = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot QR = LS$$

nur für $P = S$. qed

Nun sei $ABCDEF$ ein konvexes Secheck. Die Hauptdiagonalen AD, BE und CF schließen paarweise spitze Winkel miteinander ein, deren Summe 180^o betragen muss. Der größere unter diesen Winkeln muss also größer oder gleich 60^o sein. Seien o.B.d.A. AD und BE Hauptdiagonalen mit $\angle AD, BE \geq 60^o$ und $P = AD \cap BE$.



M und N seien die Mittelpunkte von AB bzw. DE. Dann gilt unter Verwendung des Lemmas

$$\begin{aligned} MN &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (AB + DE) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot DE \\ &\geq PM + PN \\ &\geq MN, \end{aligned}$$

und Gleichheit kann nach dem Lemma nur dann gelten, wenn $\triangle ABP$ und $\triangle DEP$ gleichseitig sind. Wir haben also

$$\angle DAB = \angle PAB = 60^o$$

und analog

$$\angle EBA = \angle ADE = \angle BED = 60^o.$$

Da nun $\angle AD, BE = 60^o$ gilt, muss die Summe von $\angle AD, CF$ und $\angle BE, CF$ gleich 120^o sein, und daher eines dieser Winkel größer oder gleich 60^o. Ist dies o.B.d.A. $\angle AD, CF$, folgt analog zum vorangegangenen Teil

$$\angle AD, DF = 60^o$$

und

$$\angle DAF = \angle CFA = \angle ADC = \angle FCD = 60^o,$$

und da schließlich dann auch $\angle BE, CF = 60^o$ gelten muss, folgt wiederum analog

$$\angle EBC = \angle FCB = \angle BEF = \angle CFE = 60^o,$$

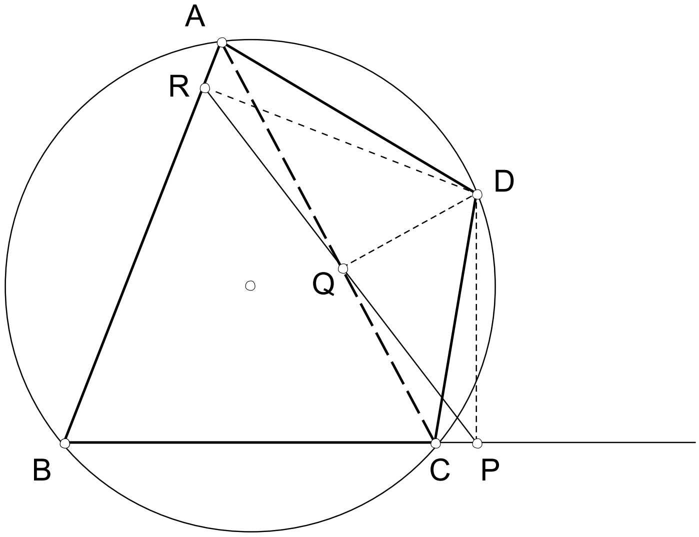
und es sind somit alle Innenwinkel des Sechsecks wie gefordert gleich $2 \cdot 60^o = 120^o$. qed

---

Aufgabe 4

Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck. Ferner seien P, Q und R die Fußpunkte der Lote von D auf die Geraden BC, CA und AB (in dieser Reihenfolge). Man beweise, dass $\overline{PQ} = \overline{QR}$ dann und nur dann gilt, wenn sich die Winkelhalbierenden der Winkel $\angle ABC$ und $\angle ADC$ auf der Geraden AC schneiden!

Lösung:



Da D auf dem Umkreis von $\triangle ABC$ liegt, liegen P, Q und R alle auf der Simson-Gerade von D bezüglich $\triangle ABC$. Wir wissen also sicher, dass P, Q und R kollinear liegen.

Da $\angle DPC = \angle DQC = 90^o$ gilt, ist $DPCQ$ ein Sehnenviereck und es gilt

$$\angle DCA = \angle DCQ = \angle DPQ = \angle DPR.$$

Analog gilt unter Verwendung des Sehnenvierecks $DARQ$

$$\angle DAC = \angle DRP$$

und es gilt somit

$$\triangle DCA \sim \triangle DPR.$$

Analog erhalten wir mit

$$\triangle DAB \sim \triangle DQP$$

und

$$\triangle DBC \sim \triangle DRQ$$

zwei weitere Paare ähnlicher Dreiecke, und es gilt

$$\frac{DA}{DC} = \frac{DR}{DP} = \frac{DB \cdot \frac{QR}{BC}}{DB \cdot \frac{PQ}{BA}} = \frac{QR}{PQ} \cdot \frac{BA}{BC}.$$

Es gilt also $PQ = QR$ genau dann, wenn auch

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}$$

gilt. Da eine Winkelsymmetrale in einem Dreieck die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, ist dies wiederum damit gleichwertig, dass die Winkelsymmetralen von $\angle ABC$ (in $\triangle ABC$) und $\angle ADC$ (in $\triangle ADC$) die gemeinsame Seite AC der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ADC$ im selben Punkt teilen, also dass sich diese beiden Winkelsymmetralen in einem Punkt von AC schneiden. qed

---

Aufgabe 5

Es sei n eine positive ganze Zahl und es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reelle Zahlen mit $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$.
(a) Man beweise:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \le \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2.$$

(b) Man zeige, dass Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine arithmetische Folge ist!

Lösung:

ad (a): Wir bemerken zunächst, dass beide Seiten der Ungleichung invariant gegenüber linearer Transformation sind. Wir können also o.B.d.A.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

annehmen. Für die linke Seite der Ungleichung gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j| = 2 \cdot \sum_{i<j}(x_j - x_i) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i,$$

und nach der CAUCHY-Ungleichung gilt somit

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^2 &= \left(2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i\right)^2 \\
&\le 4 \cdot \sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
&= 4 \cdot ((-n+1)^2 + (-n+3)^2 + \ldots + (n-1)^2) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

gilt aber für gerade n

$$\begin{aligned}
(-n+1)^2 + (-n+3)^2 + \ldots + (n-1)^2 &= 2 \cdot (2^2 + 4^4 + \ldots + (n-1)^2) \\
&= 8 \cdot \left(1^2 + 2^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right) \\
&= 8 \cdot \frac{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot n}{6} \\
&= \frac{n(n-1)(n+1)}{3},
\end{aligned}$$

und für ungerade n

$$\begin{aligned}
(-n+1)^2 + \ldots + (n-1)^2 &= 2 \cdot (1^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2) \\
&= 2 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2) - 2 \cdot (2^2 + 4^2 + \ldots + (n-2)^2) \\
&= \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{3} - 8 \cdot \left(1^2 + 2^2 + \ldots + \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n(n-1)(2n-1)}{3} - 8 \cdot \frac{\left(\frac{n}{2}-1\right) \cdot \frac{n}{2} \cdot (n-1)}{6} \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1)}{3} - \frac{(n-2) \cdot n \cdot (n-1)}{3} \\
&= \frac{n(n-1)(n+1)}{3},
\end{aligned}
$$

und somit

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^2 \leq 4 \cdot \frac{n(n-1)(n+1)}{3} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Es gilt aber auch wegen

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2 &= n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j + n \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \\
&= 2n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2,
\end{aligned}
$$

und somit zusammenfassend

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^2 &\leq 4 \cdot \frac{n(n-1)(n+1)}{3} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
&= \frac{2(n^2-1)}{3} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2.
\end{aligned}
$$

qed

ad (b) Wenn Gleichheit gilt, folgt aus der CAUCHY-Ungleichung, dass es ein k gibt mit

$$x_i = k(2i - n - 1)$$

für alle $1 \leq i \leq n$, womit $\langle x_i \rangle$ jedenfalls eine arithmetische Folge ist.
Ist $\langle x_i \rangle$ andererseits eine arithmetische Folge mit Differenz d, gilt sicher

$$
\begin{aligned}
x_i &= x_1 + d(i-1) \\
&= \frac{x_1 + x_n}{2} - \frac{d(n-1)}{2} + d(i-1) \\
&= \frac{x_1 + x_n}{2} + \frac{d}{2} \cdot (2i - n - 1).
\end{aligned}
$$

Subtrahiert man von jedem x_i den Wert $\frac{x_1+x_n}{2}$, erhält man neue $\overline{x_i}$ mit

$$\overline{x_i} = \frac{d}{2} \cdot (2i - n - 1) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} = 0,$$

woraus die Gleichheit unmittelbar folgt. qed

Aufgabe 6

Es sei p ein Primzahl. Man beweise, dass eine Primzahl q existiert, so dass für jede ganze Zahl n die Zahl $n^p - p$ nicht durch q teilbar ist!

Lösung:

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{p^p - 1}{p - 1} &= p^{p-1} + p^{p-2} + \ldots + p^2 + p + 1 \\ &\equiv p + 1 \ (mod\, p^2) \end{aligned}$$

existiert sicher mindestens ein Primteiler von $\frac{p^p-1}{p-1}$, die nicht kongruent 1 modulo p ist. Wir wählen einen solchen Teiler und bezeichnen ihn als q. Nun wollen wir also zeigen, dass jedes q mit dieser Eigenschaft auch die geforderte Eigenschaft besitzt.

Es seien also $p, q \in \mathbf{P}$ mit $q | \frac{p^p-1}{p-1}$ und $q \not\equiv 1 \ (mod\, p^2)$. Wir nehmen an, dass ein $n \in \mathbf{Z}$ existiert mit

$$n^p \equiv p \ (mod\, q).$$

Dann gilt wegen $q | \frac{p^p-1}{p-1}$

$$n^{p^2} \equiv p^p \equiv 1 \ (mod\, q).$$

Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt

$$n^{q-1} \equiv 1 \ (mod\, q).$$

Wegen $q \not\equiv 1 \ (mod\, p^2)$ gilt $p^2 \not| q - 1$, und somit

$$(p^2, q - 1) | p,$$

womit aus $n^{p^2} \equiv 1 \ (mod\, q)$ auch

$$n^p \equiv 1 \ (mod\, q)$$

folgt. Es ist aber somit sicher $q - 1$ ein Teiler von p, und es gilt somit wegen $p \in \mathbf{P}$

$$q - 1 = p \quad \Rightarrow \quad p \equiv 1 \ (mod\, q).$$

Daraus folgt aber

$$p^{p-1} + p^{p-2} + \ldots + p + 1 \equiv p \ (mod\, q),$$

und somit wegen $q | \frac{p^p-1}{p-1}$

$$p \equiv 0 \ (mod\, q),$$

was einen Widerspruch zur Primeigenschaft von p und q (mit $p \neq q$) ist.

Ein derartiges n kann also für das gewählte q nicht existieren. qed