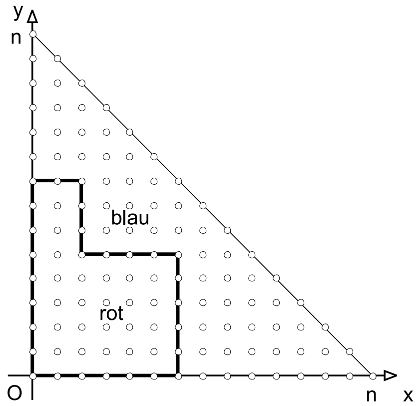
Aufgabe 1

Es sei n eine positive ganze Zahl. Ferner sei T die Menge der Punkte (x, y) in der Ebene, wobei x und y nichtnegative ganze Zahlen mit $x + y < n$ sind. Jeder Punkt von T ist entweder rot oder blau gefärbt. Ist ein Punkt (x, y) rot, so sind es auch alle Punkte (x', y') in T mit $x' \leq x$ und $y' \leq y$. Wir definieren als X-Menge eine Menge von n blauen Punkten mit verschiedenen x-Koordinaten, und als Y-Menge eine Menge von n blauen Punkten mit verscheidenen y-Koordinaten.

Man beweise, dass die Anzahl der X-Mengen mit der Anzahl der Y-Mengen übereinstimmt!

Lösung:

Es sei a_i die Anzahl der blauen Punkte mit der x-Koordinate i und b_i die Anzahl der blauen Punkte mit der y-Koordinate i. Die Anzahl der X-Mengen ist dann $a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}$ und die Anzahl der Y-Mengen ist $b_0 \cdot b_1 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}$. Wir zeigen mittels vollständiger Induktion, dass $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ eine Permutation von $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ ist, und somit diese Produkte gleich sein müssen.



Der Fall $n = 1$ ist trivial, da es in diesem Fall nur einen gefärbten Punkt, nämlich den Ursprung, gibt. Es gilt dann sicher $a_0 = b_0 = 0$ oder $a_0 = b_0 = 1$, je nachdem dieser Punkt rot oder blau gefärbt ist. Die Induktionsvoraussetzung ist also gesichert.

Nun können wir als Induktionsannahme festhalten, dass $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ eine Permutation von $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ für alle $k \leq n$ gilt, und wollen daraus ableiten, dass auch $(a_o, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ eine Permutation von $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n)$ sein muss.

<u>1. Fall:</u> Wir nehmen an, dass alle Punkte mit Koordinaten (x, y) und $x + y = n$ blau sind. In diesem Fall betrachten wir die Punktmenge T', die aus allen Punkten in T besteht mit $x+y < n$. In dieser Menge ist $(a'_0, a'_1, \ldots, a'_{n-1})$ sicher laut Induktionsannahme eine Permutation von $(b'_0, b'_1, \ldots, b'_{n-1})$. Nun gilt in diesem Fall aber $a_i = a'_i + 1$ für $0 \leq i \leq n-1$ und auch $b_i = b'_i + 1$ für $0 \leq i \leq n-1$. Ferner gilt $a_n = b_n = 1$, und $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ ist somit sicher eine Permutation von $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n)$.

<u>2. Fall:</u> Wir nehmen an, dass es einen roten Punkt von T gibt, der die Koordinaten (x, y) hat mit $x + y = n$. Seien $(m, n - m)$ die Koordinaten eines solchen Punkts.

Dann sind alle Punkte mit den Koordinaten $0 \leq x \leq m$ und $0 \leq y \leq n - m$ rot, und T zerfällt in zwei getrennte Bereiche. Ein Bereich T_1 liegt zur Gänze im Bereich $x < m$, $y > n - m$, und der zweite T_2 im Bereich $x > m$, $y < n - m$.

Der Bereich T_1 enthält alle blauen Punkte mit x-Koordinate kleiner als m und alle mit y-Koordinate größer als $n - m$. Da man sich dieses Dreieck so verschoben denken kann, dass das linke untere Eck in den Ursprung zu liegen kommt, gilt nach der Induktionsannahme, dass $(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1})$ eine Permutation von $(b_{n-m+1}, b_{n-m+2}, \ldots, b_n)$ ist. Dies gilt analog für T_2 und

$(a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n)$ muss eine Permutation von $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-m-1})$ sein. Nach der Voraussetzung, dass der Punkt mit den Koordinaten $(m, n-m)$ rot sein soll, gilt aber $a_m = b_{n-m} = 0$, und es folgt, dass auch in diesem Fall $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ eine Permutation von $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n)$ ist, womit die Induktion aber abgeschlossen ist. qed

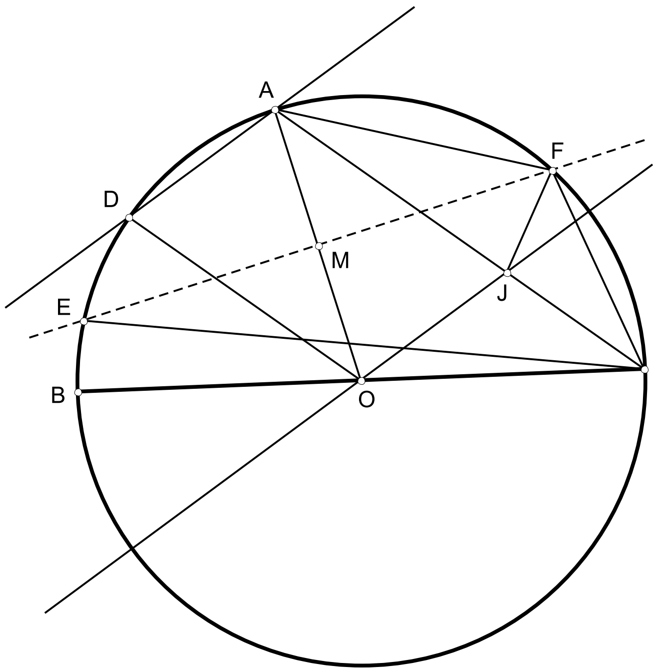
---

Aufgabe 2

Es sei BC ein Durchmesser eines Kreises Γ mit dem Mittelpunkt O. Ferner sei A ein Punkt auf Γ mit $0^o < \angle AOB < 120^o$. Der Punkt D sei der Mittelpunkt desjenigen Kreisbogens AB, der C nicht enthält. Die zu DA parallele Gerade durch O schneidet die Gerade AC in J. Die Mittelsenkrechte von OA schneidet Γ in E und F.

Man beweise, dass J der Inkreismittelpunkt des Dreiecks CEF ist!

Lösung:



Wir bemerken zunächst, dass die Sehnen AE und AF von Γ sicher gleich lang sind, da EF die Streckensymmetrale des Kreisradius AO ist. ($\triangle AOE$ und $\triangle AOF$ sind daher sogar gleichseitig.) Es gilt nach dem Peripheriewinkelsatz somit sicher $\angle ACE = \angle ACF$, und da J auf AC liegt, liegt J auf der Winkelsymmetrale von $\angle EFC$.

Da D der Mittelpunkt des Bogens AB ist, gilt nach dem Peripheriewinkelsatz

$$\begin{aligned} \angle AOD &= \frac{1}{2} \cdot \angle AOB \\ &= \angle ACB, \end{aligned}$$

und da $\triangle AOC$ gleichschenkelig ist, gilt auch

$$\angle ACB = \angle ACO = \angle OAC.$$

Somit ist aber wegen $\angle AOD = \angle OAC$ die Strecke OD parallel zu AC, und $ADOJ$ ist somit ein Parallelogramm. Es gilt somit

$$AJ = OD = r = AF,$$

und $\triangle AJF$ ist gleichschenkelig. Es folgt somit

$$\angle JFE = \angle JFA - \angle EFA$$

$$
\begin{aligned}
&= \angle AJF - \angle ECA \\
&= \angle AJF - \angle JCF \\
&= \angle JFC.
\end{aligned}
$$

J liegt daher auch auf der Winkelsymmetralen von $\angle EFC$ und ist somit der Inkreismittelpunkt von $\triangle EFC$.

Wir bemerken, dass die Bedingung $\angle AOB < 120^o$ wichtig war, da für $\angle AOB \geq 120^o$ A, D und F nicht alle auf derselben Seite von BC lieben, und J somit nicht im Inneren von $\triangle EFC$.

qed

Aufgabe 3

Man bestimme alle Paare (m, n) ganzer Zahlen mit $m, n \geq 3$, für die es unendlich viele positive ganze Zahlen a gibt, so dass

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

eine ganze Zahl ist!

Lösung:

Es seien m und n ganze Zahlen mit der gewünschten Eigenschaft. Offensichtlich muss $m > n$ gelten, da ansonsten $a^n + a^2 - 1 > a^m + a - 1$ für alle $a \geq a_o$ für irgendein a_o gelten muss. Zuerst zeigen wir, dass in diesem Fall das Polynom $f(x) = x^m + x - 1$ ein Vielfaches des Polynoms $g(x) = x^n + x^2 - 1$ sein muss.

Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es Polynome q und r mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)},$$

wobei der Grad von r kleiner als der von g wäre, aber r nicht identisch 0. Es würde also wieder einen Wert x_o geben, sodass $r(x) < g(x)$ für alle $x \geq x_o$ gilt, womit aber der Wert von $\frac{f(x)}{g(x)}$ für höchstens endlich viele positive ganze Zahlen selbst eine ganze Zahl sein könnte, im Widerspruch zur Annahme.

Es gilt also sicher

$$f(x) = g(x) \cdot q(x).$$

Nun beobachten wir, dass $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[0, 1]$ sicher beide monoton steigen mit $f(0) = g(0) = -1$ und $f(1) = g(1) = 1$. Sowohl f als auch g haben somit im Intervall $[0, 1]$ eine Nullstelle, und da $g|f$ gilt, muss es sich dabei um dieselbe handeln. Sei diese gemeinsame Nullstelle α.

Sei nun ϕ die positive Nullstelle von $h(x) = x^2 + x - 1$, also $\phi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $(= 0,618\ldots)$. Da f in $[0, 1]$ monoton steigend ist, und

$$f(\phi) = \phi^m + \phi - 1 < \phi^2 + \phi - 1 = 0$$

gilt, muss auch $\alpha > \phi$ gelten. Wir nehmen jetzt an, dass $m \geq 2n$ gilt. Dann folgt

$$1 - \alpha = \alpha^m \leq (\alpha^n)^2 = (1 - \alpha^2)^2,$$

und somit

$$\begin{aligned}(1-\alpha^2)^2-(1-\alpha)\leq 0 \;&\Leftrightarrow\; (1-\alpha)((1-\alpha)(1+\alpha)^2-1)\leq 0\\ &\Leftrightarrow\; (1-\alpha)((1-\alpha)(1+2\alpha+\alpha^2)-1)\leq 0\\ &\Leftrightarrow\; (1-\alpha)(1+2\alpha+\alpha^2-\alpha-2\alpha^2-\alpha^3-1)\leq 0\\ &\Leftrightarrow\; (1-\alpha)(\cdot\alpha\cdot(-\alpha^2-\alpha+1)\leq 0\\ &\Leftrightarrow\; (1-\alpha)\cdot\alpha\cdot(\alpha^2+\alpha-1)\geq 0,\end{aligned}$$

und somit

$$\alpha^2+\alpha-1\geq 0.$$

Da auch $h(x)$ monoton steigend in $[0,1]$ ist, bedeutet dies aber $\alpha\geq\phi$, was einen Widerspruch ergibt.

Es gilt also sicher $m<2n$. Nehmen wir an, wir würden Werte von m und n kennen, die die Voraussetzung erfüllen, und nehmen $a=2$. Sei

$$d:=g(2)=2^n+3.$$

Wegen $g(2)|f(2)$ gilt $f(2)\equiv 0\ (mod\ d)$, und somit

$$\begin{aligned}&2^m+2-1\equiv 0\ (mod\ d)\\ \Leftrightarrow\;& -2^m\equiv 1\ (mod\ d).\end{aligned}$$

Schreiben wir $m=n+k$ mit $1\leq k<n$ (wegen $m<2n$), so gilt aber auch

$$\begin{aligned}-2^m &\equiv d\cdot 2^k-2^m\\ &\equiv (d-2^n)\cdot 2^k\\ &\equiv 3\cdot 2^k\ (mod\ d).\end{aligned}$$

Für $1\leq k\leq n-2$ gilt aber sicher $3\cdot 2^k\not\equiv 1\ (mod\ d)$. Es muss also $k=n-1$ gelten, und somit $m=2n-1$.

Es folgt also

$$\begin{aligned}3\cdot 2^{n-1}-d=1 \;&\Leftrightarrow\; 3\cdot 2^{n-1}-2^n-3=1\\ &\Leftrightarrow\; 2^{n-1}=4,\end{aligned}$$

und dies ist nur richtig für $n=3$, womit $m=2\cdot 3-1=5$ gelten muss.

Tatsächlich gilt auch

$$a^5+a-1=(a^3+a^2-1)(a^2-a-1),$$

womit $(m;n)=(5;3)$ die einzigen Werte sind, die die Bedingungen erfüllen. qed

---

Aufgabe 4

Es sei n eine positive ganze Zahl größer als 1. Die positiven Teiler von n seien $d_1,d_2,\ldots,d_k$ mit

$$1=d_1<d_2<\ldots<d_k=n.$$

Wir definieren $D=d_1d_2+d_2d_3+\ldots+d_{k-1}d_k$.

(a) Man beweise: $D<n^2$.

(b) Man bestimme alle Werte von n, für die D ein Teiler von n^2 ist!

Lösung:

Wenn d ein Teiler von n ist, so ist es sicher auch $\frac{n}{d}$. Es gilt somit

$$\begin{aligned}
D &= \sum_{i=1}^{k-1} d_i d_{i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{n^2}{d_{k-i+1} d_{k-i}} \\
&= n^2 \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{d_{k-i+1} d_{k-i}} \\
&\leq n^2 \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d_{k-i+1} - d_{k-i}}{d_{k-i+1} d_{k-i}} \\
&= n^2 \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{d_{k-i}} - \frac{1}{d_{k-i+1}} \right) \\
&= n^2 \cdot \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_k} \right) \\
&< n^2 \cdot \frac{1}{d_1} \\
&= n^2,
\end{aligned}$$

und Teil a) ist fertig gezeigt.
Um den Teil b) zu lösen, nehmen wir an, dass p der kleinste Primteiler von n sei. Dann gilt

$$d_1 = 1, \quad d_2 = p, \quad d_{k-1} = \frac{n}{p} \quad \text{und} \quad d_k = n.$$

Ist n selbst prim, so gilt $n = p$, und somit $k = 2$ und

$$D = 1 \cdot p = 1 \cdot n = n,$$

was sicher ein Teiler von n^2 ist.
Ist n aber nicht prim, so gilt $k > 2$ und

$$D > d_{k-1} d_k = \frac{n^2}{p},$$

und sopmit $\frac{n^2}{p} < p$. Wenn $D | n^2$ gilt, muss auch $\frac{n^2}{D} | n^2$ gelten. Wegen a) gilt aber

$$1 < \frac{n^2}{D} < p,$$

was ein Widerspruch zur Tatsache ist, dass p der kleinste Primteiler von n ist.
D ist also genau dann ein Teiler von n^2 wenn n prim ist. qed

---

Aufgabe 5

Man bestimme alle funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, so dass für alle $x, y, z, t \in \mathbf{R}$ gilt

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz).$$

Lösung:

Wir bezeichnen die gegebene Funktionalgleichung als $(*)$. Sei zunächst $f(x) = c$ eine konstante Lösung von $(*)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & (f(x)+f(z))(f(y)+f(t)) = f(xy-zt)+f(xt+yz) \\ \Leftrightarrow\ & 2c\cdot 2c = c+c \\ \Leftrightarrow\ & 4c^2 = 2c \\ \Leftrightarrow\ & 2c\cdot(2c-1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & c=0 \ \vee\ c=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nach kurzem Experimentieren mit $(*)$ erkennt man auch, dass $f(x) = x^2$ eine Lösung ist, da in diesem Fall

$$\begin{aligned} (f(x)+f(z))(f(y)+f(t)) &= (x^2+z^2)(y^2+t^2) \\ &= x^2y^2+x^2t^2+y^2z^2+z^2t^2 \\ &= x^2y^2-2xyzt+z^2t^2+x^2t^2+2xyzt+y^2z^2 \\ &= f(xy-zt)+f(xt+yz) \end{aligned}$$

gilt. Wir haben also die drei Lösungen

$$f(x)=0,\quad f(x)=\frac{1}{2}\ \text{ und }\ f(x)=x^2,$$

und wollen nun zeigen, dass es außer diesen keine weiteren Lösungen gibt.
Wir setzten in $(*)$ $x = y = z = 0$. Dann gilt

$$(2f(0))(f(0)+f(t)) = 2\cdot f(0), \tag{1}$$

und speziell für $t = 0$,

$$4\cdot f(0)^2 = 2\cdot f(0) \quad\Leftrightarrow\quad 2f(0)\cdot(2f(0)-1)=0,$$

womit entweder $f(0) = 0$ oder $f(0) = \frac{1}{2}$ gelten muss.
Nehmen wir an, dass $f(0) = \frac{1}{2}$ gilt. In diesem Fall folgt aus (1)

$$1\cdot\left(\frac{1}{2}+f(t)\right) = 1 \quad\Rightarrow\quad f(t)=\frac{1}{2}$$

für alle $t \in \mathbf{R}$, und $f(t) = \frac{1}{2}$ ist somit in diesem Fall die einzige Lösung.
Sei nun $f(0) = 0$. Setzen wir in $(*)$ $z = t = 0$, erhalten wir

$$\begin{aligned} & (f(x)+f(0))(f(y)+f(0)) = f(xy-0)+f(0) \\ \Leftrightarrow\ & f(x)\cdot f(y) = f(xy). \end{aligned}$$

(Vorsicht! Die übliche Lösung der Cauchy-Gleichung gilt nur in $\mathbf{Q}$!) Es gilt also besonders für $x = y = 1$

$$f(1)^2 = f(1) \quad\Rightarrow\quad f(1)\cdot(f(1)-1)=0,$$

und somit entweder $f(1) = 0$ oder $f(1) = 1$.
Im Fall $f(1) = 0$ gilt aber

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x\cdot 1) \\ &= f(x)\cdot f(1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

und somit $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$.
Es bleibt also nur noch der Fall $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Wir behaupten, dass $f(x) = x^2$ in diesem Fall die einzig mögliche Lösung von $(*)$ ist.
Setzen wir in $(*)$ $y = 0$ und $x = z = 1$, so folgt

$$\begin{aligned} & (F81) + f(1))(f(0) + f(t)) = f(-t) + f(t) \\ \Rightarrow \quad & 2f(t) = f(-t) + f(t) \\ \Rightarrow \quad & f(t) = f(-t). \end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen, dass $f(x) = x^2$ für $x \geq 0$ in diesem Fall die einzige Lösung ist.
Wegen $f(x^2) = f(x)^2 \geq 0$ gilt $f(y) \geq 0$ für $y \geq 0$, und somit für all $y \in \mathbf{R}$.
Setzen wir in $(*)$ $t = x$ und $z = y$, so gilt

$$f(0) + f(x^2 + y^2) = (f(x) + f(y))^2,$$

und daher auch

$$f(x^2 + y^2) \geq f(x)^2 = f(x^2),$$

und wegen $f(u + v) \geq f(u)$ für $u, v \geq 0$ ist f sicher monoton steigen in $\mathbf{R}^+$.
Nun setzen wir schließlich in $(*)$ $y = z = t = 1$. Dann erhalten wir

$$2(f(x) + 1) = f(x - 1) + f(x + 1).$$

Nun folgt aber $f(n) = n^2$ für $n \in \mathbf{N}$ durch Induktion, da $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ gelten, und

$$\begin{aligned} f(n+1) &= 2(f(n) + 1) - f(n-1) \\ &= 2(n^2 + 1) - (n-1)^2 \\ &= 2n^2 + 2 - n^2 + 2n - 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

Es gilt also $f(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbf{N}$, und wegen $f(-x) = f(x)$ somit für alle $x \in \mathbf{Z}$. Da

$$f(x) \cdot f(y) = f(xy)$$

gilt, folgt für $p, q \in \mathbf{Z}$ $(q \neq 0)$ auch

$$f\left(\frac{p}{q}\right) \cdot f(q) = f(p) \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{f(p)}{f(q)} = \frac{p^2}{q^2},$$

und somit $f(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbf{Q}$.
Nehmen wir nun an, es gäbe ein $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ mit $x > 0$ und $f(x) \neq x^2$. Sei $f(x) < x^2$ (für $f(x) > x^2$ gehen wir analog vor.) Dann existiert ein $a \in \mathbf{Q}$ mit

$$\sqrt{f(x)} < a < x,$$

und es gilt

$$f(a) = a^2 > f(x),$$

was aber ein Widerspruch zur Monotonie von f auf $\mathbf{R}^+$ mit

$$a < x \quad \Rightarrow \quad f(a) < f(x)$$

ist. Es muss also für alle nicht-negativen x, und somit für alle $x \in \mathbf{R}$ in diesem Fall

$$f(x) = x^2$$

gelten. qed

Aufgabe 6

Es seien $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ Kreise mit Radius 1 in der Ebene, wobei $n \geq 3$. Deren Mittelpunkte seien mit $O_1, O_2, \ldots, O_n$ bezeichnet. Es wird angenommen, dass keine Gerade in der Ebene mehr als zwie dieser Kreise schneidet oder berührt.

Man beweise:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{\overline{O_i O_j}} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

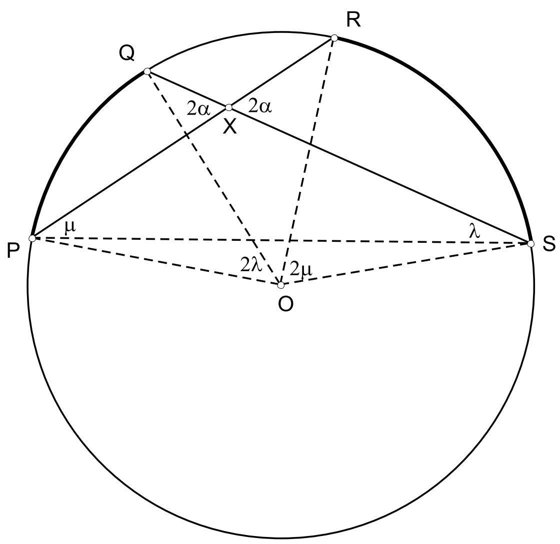
Lösung:

Es wird sich als hilfreich herausstellen, zunächst das folgende Lemma zu beweisen:

Lemma: Es sei Ω ein Kreis mit Radius ρ und Mittelpunkt O. PR und QS seien Sehnen von Ω, die sich im Punkt X (im Inneren von Ω) schneiden mit $\angle PXQ = \angle RXS = 2\alpha$. Dann gilt

$$arc(PQ) + arc(RS) = 4\alpha\rho.$$

Beweis des Lemmas: Es seien $\angle POQ = 2\lambda$ und $\angle ROS = 2\mu$ (siehe Figur 6.1.).



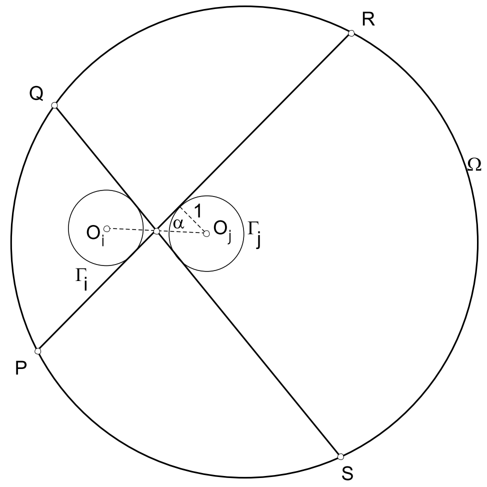
Figur 6.1.

Dann gilt nach dem Peripheriewinkelsatz $\angle QSP = \lambda$ und $\angle RPS = \mu$ und in $\triangle XPS$ sehen wir, dass $\lambda + \mu = 2\alpha$ gilt. Es gilt somit

$$\begin{aligned} arc(PQ) + arc(RS) &= 2\lambda\rho + 2\mu\rho \\ &= 2\rho(\lambda + \mu) \\ &= 4\alpha\rho. \end{aligned}$$

qed

Fortsetzung des Beweises: Wir zeichnen zunächst einen großen Kreis Ω mit Radius ρ in dessen Inneren alle Kreis Γ_i liegen und betrachten zwei Kreise Γ_i und Γ_j im Inneren von Ω.



Figur 6.2.

Die beiden Kreise Γ_i und Γ_j haben sicher keinen gemeinsamen Schnittpunkt, da es ansonsten im Widerspruch zur Voraussetzung durch einen solchen Punkt eine Gerade gäbe, die einen weiteren Kreis Γ_k schneidet. Die beiden Kreise Γ_i und Γ_j haben also zwei gemeinsame innere Tangenten. Sei 2α der Winkel, den diese beiden Tangenten einschließen (wobei die Kreis in den 2α großen Winkelfeldern liegen) und seien P und R bzw. Q und S deren Schnittpunkte mit Ω. da die Radien von Γ_i und Γ_j gleich 1 sind, gilt $\sin\alpha = \frac{1}{\frac{\overline{\overline{O_iO_j}}}{2}}$, und es gilt somit

$$\alpha \geq \sin\alpha = \frac{2}{\overline{\overline{O_iO_j}}}.$$

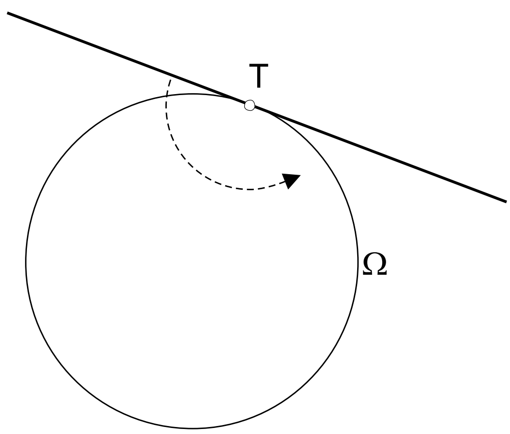
Aus dem Lemma folgt

$$\begin{aligned} arc(PQ) + arc(RS) &= 4\alpha\rho \\ &\geq \frac{8\rho}{\overline{\overline{O_iO_j}}}, \end{aligned}$$

und es gilt somit

$$\frac{1}{\overline{\overline{O_iO_j}}} \leq \frac{arc(PQ) + arc(RS)}{8\rho}.$$

Um die Summe der Kreisbögenlängen über alle auftretenden Kreispaare abschätzen zu können, stellen wir fest, dass kein Punkt von Ω auf mehr als $n-1$ derartigen Kreisbögen liegen kann. Zu diesem Zweck sei T ein fest vorgegebener Punkt von Ω (Figur 6.3.).



Figur 6.3.

Drehen wir die Tangente an Ω in T allmählich um T wie abgebildet, so schneidet die Gerade laut Voraussetzung zu keinem Zeitpunkt mehr als zwei Kreise. Bezeichnen wir die Kreise in der Reihenfolge, in der die von dieser Geraden bei der Drehung geschnitten werden als $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, so liegt T höchstens auf den Bögen PQ bzw. RS für die $n-1$ Kreispaare $(\Gamma_1, \Gamma_2), (\Gamma_2, \Gamma_3), \ldots, (\Gamma_{n-1}, \Gamma_n)$, und da dieses Argument für jeden Punkt von Ω gilt, liegt jeder Punkt von Ω höchstens auf $n-1$ der auftretenden Bögen PQ bzw. RS. Die Summe aller auftretenden Bogenlängen ist also gleich dem $(n-1)$-fachen Umfang von Ω, also $(n-1) \cdot 2\rho\pi$, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{\overline{O_i O_j}} &\leq \frac{1}{8\rho} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} (arc(PQ) + arc(RS)) \\
&= \frac{1}{8\rho} \cdot (n-1) \cdot 2\rho\pi \\
&= \frac{(n-1)\pi}{4}.
\end{aligned}$$

qed