Zahlentheorieaufgaben 2020

1) Gegeben sind zwei Mengen dreistelliger Zahlen: Die Menge A enthält alle dreistelligen Zahlen mit der Ziffernsumme 6. Die Menge B enthält alle dreistelligen zahlen, in denen die Einerziffer um 1 kleiner und die Hunderterziffer um 1 größer als die Zehnerziffer ist. Kann man aus der Menge A eine Zahl a und aus der Menge B eine Zahl b so auswählen, dass der größte gemeinsame Teiler von a und b gleich 1 ist?

2) Dividiert man 214 durch eine natürliche Zahl n, so bleibt der Rest 1. Dividiert man 419 durch dieselbe natürliche Zahl n, so bleibt der Rest 2. Begründen Sie, warum n eine ungerade Zahl sein muss. Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft aus der Angabe! Erklären Sie auch, warum es außer der/den von Ihnen gefundenen keine weiteren Zahlen mit dieser Eigenschaft geben kann!

3) Das Produkt zweier zweistelliger Zahlen ist eine mehrstellige Zahl, in der nur die Ziffer 8 vorkommt. Wie viele Stellen kann diese Zahl höchstens haben, wie viele hat sie mindestens? Geben Sie alle Möglichkeiten für zwei zweistellige Zahlen an, die ein derartiges Produkt ergeben.

4) Auf wie viele Nullen endet das Produkt z = $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 32 \cdot 33$ der ersten 33 positiven ganzen Zahlen? Warum?

5) Die Summe von 49 (nicht unbedingt verschiedenen) positiven ganzen zahlen ist 999. Beweisen Sie, dass ihr größter gemeinsamer Teiler nicht größer als 9 ist.

6) Für welche positiven ganzen Zahlen n ist $\frac{2^n}{n^2}$ eine natürliche Zahl?

7) Man zeige, dass die Zahl $9^n + 8^n + 7^n + 6^n - 4^n - 3^n - 2^n - 1^n$ für alle nicht negativen ganzen Zahlen n durch 10 teilbar ist.

8) Gibt es ganze Zahlen a und b so, dass $a^{2006} + b^{2006} + 1$ durch 2006^2 teilbar ist?

9) Man zeige: Es gibt keine positiven ganzen Zahlen a und b mit 4a(a+1) = b(b+3).

10) Man bestimme die kleinste vierstellige Zahl, die durch 3 dividiert eine vierstellige Zahl mit den gleichen Ziffern ergibt. (Achtung: Vierstellig heißt, dass die vorderste Ziffer nicht 0 sein darf.)

11) Man zeige: Das Produkt von 5 auf einander folgenden geraden natürlichen Zahlen ist durch 15 teilbar. Bestimmen Sie (mit Beweis) die größte ganze Zahl D, sodass das Produkt von 5 auf einander folgenden geraden natürlichen Zahlen stets durch D teilbar ist.

12) Man bestimme alle Primzahlen p, für die $5^p + 4p^4$ eine Quadratzahl ist.

13) Wir bilden die Summe von 7 auf einander Folgenden geraden natürlichen Zahlen (z.B. 2+4+6+8+10+12+14) und nennen sie A, dann die der nächsten 7 geraden Zahlen (hier 16+18+…) und nennen sie B und dann noch einmal die nächsten 7 geraden Zahlen und nennen ihre Summe C. Kann das Produkt ABC = 2002^3 sein?

14) Man zeige, dass für alle ungeraden natürlichen Zahlen n die Zahl $n^n - n$ durch 24 teilbar ist.