

Zahlentheorieaufgaben I

- 1) Das Produkt von fünf aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist 524160. Begründe, warum wenigstens die kleinste der 5 Zahlen kleiner als 20 sein muss. bestimme die fünf Zahlen!
- 2) Bestimme die kleinste natürliche Zahl, deren Ziffernsumme 97 ist. Bestimme die kleinste natürliche Zahl, für die das Produkt ihrer Ziffern 29400 ist.
- 3) Gegeben sind zwei Mengen dreistelliger Zahlen: Die Menge A enthält alle dreistelligen Zahlen mit der Ziffernsumme 6. Die Menge B enthält alle dreistelligen Zahlen, in denen die Einerziffer um 1 kleiner und die Hunderterziffer um 1 größer als die Zehnerziffer ist. Kann man aus der Menge A eine Zahl a und aus der Menge B eine Zahl b so auswählen, dass der größte gemeinsame Teiler von a und b gleich 1 ist?
- 4) Dividiert man 214 durch eine natürliche Zahl n, so bleibt der Rest 1. Dividiert man 419 durch dieselbe natürliche Zahl n, so bleibt der Rest 2. Begründe, warum n eine ungerade Zahl sein muss. Bestimme alle natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft aus der Angabe! Erkläre auch, warum es außer der/den von dir gefundenen keine weiteren Zahlen mit dieser Eigenschaft geben kann!
- 5) Das Produkt zweier zweistelliger Zahlen ist eine mehrstellige Zahl, in der nur die Ziffer 8 vorkommt. Wie viele Stellen kann diese Zahl höchstens haben, wie viele hat sie mindestens? Gib alle Möglichkeiten für zwei zweistellige Zahlen an, die ein derartiges Produkt ergeben.
- 6) Auf wie viele Nullen endet das Produkt $z = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 32 \cdot 33$ der ersten 33 positiven ganzen Zahlen?
- 7) In der Zahl $7 * 42 *$ sind anstelle der beiden Sterne Ziffern so einzusetzen, dass die entstandene Zahl durch 45 teilbar ist. Es sind alle Möglichkeiten anzugeben.
- 8) In der Zahl $* 378 *$ sind anstelle der beiden Sterne Ziffern so einzusetzen, dass die entstandene Zahl durch 72 teilbar ist. Es sind alle Möglichkeiten anzugeben.
- 9) Mit welcher Ziffer endet die Summe $11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6 + 16^6$?
- 10) Wie viele positive ganze Zahlen unter 1000 gibt es, die weder durch 5 noch durch 7 teilbar sind?
- 11) Die Summe von 49 (nicht unbedingt verschiedenen) positiven ganzen Zahlen ist 999. Beweise, dass ihr größter gemeinsamer Teiler nicht größer als 9 ist.

Zahlentheorieaufgaben II

- 12) Für welche positiven ganzen Zahlen n ist $\frac{2^n}{n^2}$ eine natürliche Zahl?
- 13) Man zeige, dass die Zahl $9^n + 8^n + 7^n + 6^n - 4^n - 3^n - 2^n - 1^n$ für alle nicht negativen ganzen Zahlen n durch 10 teilbar ist.
- 14) Gibt es ganze Zahlen a und b so, dass $a^{2006} + b^{2006} + 1$ durch 2006^2 teilbar ist?
- 15) Man zeige: Es gibt keine positiven ganzen Zahlen a und b mit $4a(a+1) = b(b+3)$.
- 16) Man bestimme die kleinste vierstellige Zahl, die durch 3 dividiert eine vierstellige Zahl mit den gleichen Ziffern ergibt. (Achtung: Vierstellig heißt, dass die vorderste Ziffer nicht 0 sein darf.)
- 17) Man zeige: Das Produkt von 5 aufeinander folgenden geraden natürlichen Zahlen ist durch 15 teilbar. Bestimme die größte ganze Zahl D , sodass das Produkt von 5 aufeinander folgenden geraden natürlichen Zahlen stets durch D teilbar ist.
- 18) Man bestimme alle Primzahlen p , für die $5^p + 4p^4$ eine Quadratzahl ist.
- 19) Wir bilden die Summe von 7 aufeinander folgenden geraden natürlichen Zahlen (z.B. $2+4+6+8+10+12+14$) und nennen sie A , dann die der nächsten 7 geraden Zahlen (hier $16+18+\dots$) und nennen sie B und dann noch einmal die nächsten 7 geraden Zahlen und nennen ihre Summe C . Kann das Produkt $ABC = 2002^3$ sein?
- 20) Man zeige, dass für alle ungeraden natürlichen Zahlen n die Zahl $n^n - n$ durch 24 teilbar ist.