Zahlentheorie

Robert Geretschläger

Aufgaben aus diesem Bereich beginnen mit einer großen Nähe zum Schulstoff (Primzahlen, einfache Teilbarkeitsregeln) und steigen im Schwierigkeitsgrad rasch und steil an. Inhalte wie diophantische Gleichungen oder der „*kleine Fermat*“ sind schon in der höheren Zahlentheorie angesiedelt, können aber noch durchaus einfach und anschaulich zu lösende Aufgaben ermöglichen. Der Schwierigkeitsgrad ist aber oft unabschätzbar. Sehr einfach aussehende Aufgaben können sich als außerordentlich schwer entpuppen (z.B. großer Fermat!)

Teilbarkeit und Primzahlen

1) Es seien a, b, c und d ganze Zahlen mit $7a + 8b = 14c + 28d$ Man beweise, dass das Produkt $a \cdot b$ durch 14 teilbar sein muss.

Idee: Da $14 = 2 \cdot 7$ das Produkt von zwei Primzahlen ist, ist es hilfreich zu zeigen, dass a sicher durch einen dieser Primzahlen teilbar ist und b durch den anderen.

2) Man bestimme alle positive ganzen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass die Summe von n und dem zweitgrößten Teiler von n gleich 2013 ist.

Idee: Der zweitgrößte Teiler von n ist sicher auch ein Teiler von 2013 (warum?). Es gibt daher nur wenige Zahlen, die man auf diese Eigenschaft hin zu überprüfen hat.

3) Man beweise: ich eine positive ganze Zahle durch 99 teilbar, so ist ihre Ziffernsumme nicht kleiner als 18.

Idee: Da $99 = 9 \cdot 11$ gilt, muss eine solche Zahl sowohl durch 9 als auch durch 11 teilbar sein. Nun kann man mit den Teilbarkeitsregeln für 9 und 11 fertig argumentieren.

Rechnen mit Restklassen, quadratische Reste, Potenzreste udgl.

4) Man beweise, dass $z_n = 174^{2n-1} + 1212 \cdot 1037^{2n+1}$ für jede positive ganze Zahl n durch 3633 teilbar ist.

Idee: Da $3633 = 3 \cdot 7 \cdot 173$ gilt, kann man die Teilbarkeit von z_n durch jede dieser Primfaktoren einzeln nachweisen. Dies gelingt jeweils modulo der Primzahl.

5) Man bestimme die letzten beiden Ziffern der Zahl $7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}$

Idee: Die letzten beiden Ziffern einer Zahl sind interpretierbar als die Restklasse der Zahl modulo 100. Potenzen von 7 wiederholen sich zyklisch. (Man betrachte die Restklasse von 7^4 modulo 100.)

Diophantische Gleichungen

6) Lösen Sie folgende Gleichung in ganzen Zahlen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 10$$

Idee: Da $4^2 = 16 > 10$ gilt, und das Quadrat jeder ganzen Zahl sicher positiv ist, kann keine der Zahlen x, y und z dem Betrag nach größer als 3 sein. Von dieser Betrachtung ausgehend, kann man leicht eine systematisch Untersuchung aller denkbaren Fälle durchführen.

7) Lösen Sie folgende Gleichung in positiven ganzen Zahlen:

$$(1 + x!) \cdot (1 + y!) = (x + y)!$$

Idee: Einfache Paritätsüberlegungen führen hier rasch zum Ziel. Unter welchen Umständen kann die linke Seite der Gleichung gerade bzw. ungerade sein? Unter welchen Umständen die linke?

kleiner Fermat

Zur Erinnerung: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ für Primzahlen p und a nicht durch p teilbar.

8) Man zeige, dass die Zahl $8^{34} - 8^{18} - 8^{16} + 1$ durch 323 teilbar ist.

Idee: Die Beobachtung, dass $323 = 17 \cdot 19$ ist, und $18 = 19 - 1$ und $16 = 17 - 1$ gilt, sollte unter der vorliegenden Überschrift schon genügend Information zur Löng der Aufgabe geben.