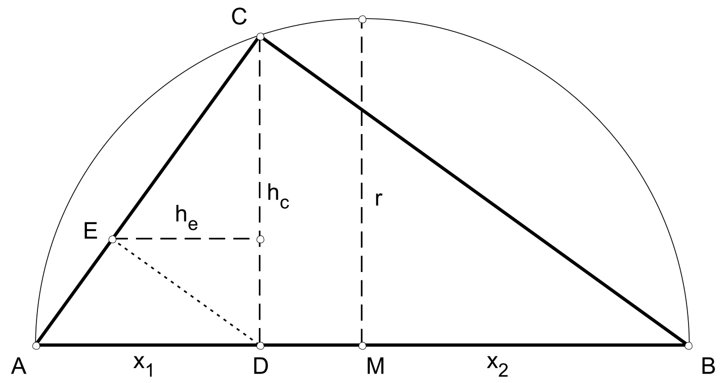
1 Mittelungleichungen und BERNOULLI

Es seien positive, reelle Zahlen x_1 und x_2 gegeben. Diese seien als Streckenlängen aufgefaßt, und wie in Figur 1 ersichtlich, werde ein rechtwinkeliges Dreieck ABC mit der Hypotenusenlänge $x_1 + x_2$ derart errichtet, daß die Dreieckshöhe die Hypotenuse im Punkt D genau im Verhältnis $x_1 : x_2$ teilt.



Figur 1

Die Höhe h_c des Dreiecks ist nach dem Höhensatz gleich $\sqrt{x_1 \cdot x_2}$. Der Radius r des Umkreises ist nach dem Satz von Thales $\frac{x_1+x_2}{2}$, und offensichtlich gilt

$$\sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Fällt man ferner das Lot $\overline{DE}$ von D auf $\overline{AC}$, so ist das Dreieck DCE dem Dreieck ABC ähnlich, und es gilt für die Höhe h_e dieses Dreiecks somit

$$\begin{aligned} h_e : \sqrt{x_1 x_2} &= \sqrt{x_1 x_2} : (x_1 + x_2) \\ \Leftrightarrow \quad h_e &= \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}. \end{aligned}$$

Wie in $\triangle ABC$ ist die Höhe kleiner oder gleich der halben Hypotenusenlänge. Es gilt also

$$\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \leq \sqrt{x_1 x_2}.$$

Man nennt den Ausdruck

$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$

das “<u>arithmetische Mittel</u>” (AM) von x_1 und x_2, den Ausdruck

$$\sqrt{x_1 x_2}$$

das “<u>geometrische Mittel</u>” (GM), und den Ausdruck

$$\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}$$

das “<u>harmonische Mittel</u>” (HM). Es gilt also

$$HM \leq GM \leq AM,$$

und wie man unschwer aus der Zeichnung sieht, gilt Gleichheit in beiden Ungleichungen genau für $x_1 = x_2$.
Dieses Ergebnis läßt sich nun auf verschiedene Arten verallgemeinern. Zunächst benötigt man folgende Definition.

__Definition 1:__ Es seien $n \in \mathbf{N}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^+$. Das "<u>$\alpha$-Mittel</u>" von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sei für $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$

$$m_\alpha := \left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha},$$

und für $\alpha = 0$

$$m_0 := (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n}.$$

Es heißen dann insbesonders

$$m_{-1} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

"<u>harmonisches Mittel</u>" (HM),

$$m_0 = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n}$$

"<u>geometrisches Mittel</u>" (GM),

$$m_1 = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

"<u>arithmetisches Mittel</u>" (AM), und

$$m_2 = \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}\right)^{1/2}$$

"<u>quadratisches Mittel</u>" (QM).

In den Sätzen 1 bis 3 werden wir zunächst sehen, daß das für $n = 2$ im Dreieck erhaltene Ergebnis auch für $n > 2$ gilt.

<u>**Satz 1:**</u> **Arithmetisch-geometrische Mittelungleichung** (AM-GM Ungleichung):
Es seien $n \in \mathbf{N}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^+$. Dann gilt

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n},$$

mit Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

<u>*Beweis:*</u> Wir führen den Beweis mittels Vorwärts-Rückwärts-Induktion. Für $n = 2$ gilt

$$\begin{aligned} & \frac{x_1 + x_2}{2} \geq (x_1 \cdot x_2)^{1/2} \\ \Leftrightarrow \quad & x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 4x_1x_2 \\ \Leftrightarrow \quad & (x_1 - x_2)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

und dies ist offensichtlich für alle $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ richtig, mit Gleichheit genau für $x_1 = x_2$. Die Behauptung gilt also für $n = 2$. Die Gültigkeit der Behauptung für $n = 4$ folgt nun, wenn man

$x_1 = \frac{x_1+x_2}{2}$ und $x_2 = \frac{x_3+x_4}{2}$ setzt. Dann gilt nämlich

$$\begin{aligned}
\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} &\geq \left(\frac{x_1+x_2}{2} \cdot \frac{x_3+x_4}{2}\right)^{1/2} \\
&\geq \left((x_1 \cdot x_2)^{1/2} \cdot (x_3 \cdot x_4)^{1/2}\right)^{1/2} \\
&= (x_1 x_2 x_3 x_4)^{1/4},
\end{aligned}$$

mit Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Analog folgt aus der Gültigkeit der Behauptung für $n = 2^k$ auch die Gültigkeit für $n = 2^{k+1}$. Die Behauptung gilt daher für alle $n = 2^k$.

Aus der Gültigkeit der Behauptung für ein bestimmtes n folgt aber auch die Gültigkeit für $n-1$. Dies sieht man durch Einsetzen von

$$x_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}$$

ein. Dann gilt nämlich wegen der Gültigkeit der Behauptung für n:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}}{n} &= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} \\
&\geq (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1})^{1/n} \cdot \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}\right)^{1/n} \\
\Leftrightarrow \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}\right)^{(n-1)/n} &\geq (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1})^{1/n} \\
\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} &\geq (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1})^{1/(n-1)},
\end{aligned}$$

mit Gleichheit genau für

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}.$$

Die Behauptung gilt also für alle n. qed

<u>**Satz 2:**</u> **Harmonisch-geometrische Mittelungleichung** (HM-GM Ungleichung):
Es seien $n \in \mathbf{N}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^+$. Dann gilt

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leq (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n},$$

mit Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

<u>*Beweis:*</u> Da alle x_i positive, reelle Zahlen sind, sind es auch ihre Kehrwerte, und es gilt daher nach der AM-GM Ungleichung (Satz 1)

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n} &\geq \left(\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x_n}\right)^{1/n} \\
&= \frac{1}{(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n}} \\
\Leftrightarrow \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} &\leq (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n},
\end{aligned}$$

mit Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. qed

<u>Satz 3:</u> **Arithmetisch-harmonische Mittelungleichung** (AM-HM Ungleichung):
Es seien $n \in \mathbf{N}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^+$. Dann gilt

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \le \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

bzw.

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \ge n^2,$$

mit Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

<u>Beweis:</u> Die Behauptung folgt einerseits unmittelbar durch Kombination der AM-GM Ungleichung und der HM-GM Ungleichung. Andererseits kann man die Gültigkeit dieser Behauptung auch folgendermaßen einsehen. Wegen

$$\begin{aligned} (x-y)^2 &\ge 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &\ge 2xy \\ \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &\ge 2 \end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbf{R}^+$ mit Gleichheit genau für $x = y$, gilt

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) &= n + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) + \ldots + \left(\frac{x_n}{x_1} + \frac{x_1}{x_n}\right) \\ &\ge n + 2 \cdot \binom{n}{2} \\ &= n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\ &= n^2. \end{aligned}$$

qed

Als Spezialfälle der AM-HM Ungleichung erhält man für $n = 2$

$$(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \ge 4,$$

und für $n = 3$

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \ge 9.$$

Eine weitere Fortsetzung der Mittelungleichungen ist der

<u>Satz 4:</u> **Arithmetisch-quadratische Mittelungleichung** (AM-QM Ungleichung):
Es seien $n \in \mathbf{N}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$. Dann gilt

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \le \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}\right)^{1/2},$$

mit Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n \geq 0$.

<u>*Beweis:*</u> Zunächst seien alle $x_i > 0$. Dann läßt sich die Behauptung folgendermaßen umformen:

$$
\begin{aligned}
& \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leq \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} \right)^{1/2} \\
\Leftrightarrow\quad & (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \leq n \cdot \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \right) \\
\Leftrightarrow\quad & \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \right) + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+j} \leq n \cdot \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \right) \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+j} \leq (n-1) \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \right),
\end{aligned}
$$

wobei $i + j$ stets modulo n aufgefaßt werden soll. Letzteres gilt aber mit Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = \ldots x_n$ wegen

$$
\begin{aligned}
0 \quad & \leq \quad \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+j})^2 \\
\Leftrightarrow 0 \quad & \leq \quad \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - 2x_i x_{i+j} + x_{i+j}^2 \right) \\
\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} 2x_i x_{i+j} \quad & \leq \quad 2 \cdot \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \right) \\
\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+j} \quad & \leq \quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \\
\Rightarrow \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+j} \quad & \leq \quad (n-1) \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \right).
\end{aligned}
$$

Die Behauptung gilt also für $x_i > 0$.
Für allgemeine x_i gilt daher

$$
\begin{aligned}
\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \quad & \leq \quad \frac{|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|}{n} \\
& \leq \quad \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} \right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

qed

Die Ergebnisse der Sätze 1 bis 4 ergeben zusammengefaßt (für $x_i \geq 0$)

$$m_{-1} \leq m_0 \leq m_1 \leq m_2,$$

mit Gleichheit jeweils genau für$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Diese Ergebnisse sind (bis auf die etwas allgemeineren Voraussetzungen von Satz 4) allesamt Spezialfälle der allgemeinen Mittelungleichung, die im Folgenden als Satz 6 bewiesen wird.

Um diesen beweisen zu können, benötigt man aber zuerst den

<u>Satz 5:</u> BERNOULLIsche Ungleichung:
Für alle $x, \alpha \in \mathbf{R}, x \geq -1, 0 < \alpha < 1$ gilt

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x.$$

Für alle $x, \alpha \in \mathbf{R}, x > -1, \alpha < 0$ oder $\alpha > 1$ gilt

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x.$$

Gleichheit gilt in beiden Fällen genau für $x = 0$. Weiters gilt Gleichheit für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$.

<u>*Beweis:*</u> Zunächst sei $x \geq -1$ und $\alpha \in \mathbf{Q}^+$, also $\alpha = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbf{N}$. Ist $1 \leq m < n$, gilt nach der AM-GM Ungleichung

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= (1+x)^{m/n} \\
&= \left((1+x)^m \cdot 1^{n-m}\right)^{1/n} \\
&\leq \frac{m(1+x) + (n-m) \cdot 1}{n} \\
&= \frac{mx + n}{n} \\
&= 1 + \alpha x,
\end{aligned}$$

und die Behauptung ist für diesen Fall gezeigt, mit Gleichheit genau für $1 + x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
Ist $\alpha \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ und $0 < \alpha < 1$, so existiert eine Folge $< \alpha_n >$ mit $\alpha_n \in \mathbf{Q}$, $0 < \alpha_n < 1$ für alle $n \in \mathbf{N}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha$. Für alle α_n gilt dann

$$(1+x)^{\alpha_n} \leq 1 + \alpha_n x,$$

und es folgt daher

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= \lim_{n \to \infty} (1+x)^{\alpha_n} \\
&\leq \lim_{n \to \infty} (1 + \alpha_n x) \\
&= 1 + \alpha x.
\end{aligned}$$

Der erste Teil der Behauptung ist also gezeigt, und es bleibt nur noch zu zeigen, daß in diesem Fall für $x \neq 0$

$$(1+x)^\alpha \neq 1 + \alpha x$$

gilt.
Dies gilt, wie bereits gezeigt, für $\alpha \in \mathbf{Q}$, $0 < \alpha < 1$. Ist also $\alpha \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$, $0 < \alpha < 1$, wählt man ein $\beta \in \mathbf{Q}$ mit $\alpha < \beta < 1$, und es gilt dann wegen $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$ für $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= \left((1+x)^{\alpha/\beta}\right)^\beta \\
&\leq \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} x\right)^\beta \\
&< 1 + \beta \cdot \frac{\alpha}{\beta} x \\
&= 1 + \alpha x.
\end{aligned}$$

qed

Nun sei $\alpha > 1$. Im Fall $1 + \alpha x < 0$ gilt

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$$

trivialerweise, da die linke Seite der Ungleichung wegen $x > -1$ positiv ist. Für $1 + \alpha x \geq 0 \Leftrightarrow \alpha x \geq -1$ gilt aber aufgrund des ersten Teils des Beweises

$$\begin{aligned} & (1+\alpha x)^{1/\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha x = 1 + x \\ \Leftrightarrow \quad & 1 + \alpha x \leq (1+x)^\alpha, \end{aligned}$$

mit Gleichheit genau für $x = 0$. qed

Abschließend sei noch $\alpha < 0$. Wie oben gilt im Fall $1 + \alpha x < 0$ die Behauptung trivialerweise. Ist $1 + \alpha x \geq 0$, sei $n \in \mathbf{N}$ mit $-\frac{\alpha}{n} < 1$ gegeben. Dann folgt aufgrund des ersten Teiles des Satzes

$$\begin{aligned} & (1+x)^{-\alpha/n} \leq 1 - \frac{\alpha}{n} x \\ \Rightarrow \quad & (1+x)^{\alpha/n} \geq \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{n} x} \geq 1 + \frac{\alpha}{n} x, \end{aligned}$$

da offensichtlich

$$1 \geq 1 - \frac{\alpha^2}{n^2} x^2$$

gilt. Die Behauptung ist daher auch für $\alpha < 0$ gezeigt, mit Gleichheit genau für $x = 0$.

Für $\alpha = 0$ lautet die Behauptung

$$(1+x)^0 = 1 + 0 \cdot x,$$

und für $\alpha = 1$ lautet sie

$$(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x,$$

und diese Aussagen sind offensichtlich wahr. qed

Für $\alpha = n \in \mathbf{N}, n > 1, x \in \mathbf{R}, x > -1$ und $x \neq 0$ läßt sich die BERNOULLIsche Ungleichung

$$(1+x)^n > 1 + nx$$

folgendermaßen auch mittels vollständiger Induktion beweisen.

Für $n = 2$ ist die Behauptung gleichwertig mit

$$(1+x)^2 > 1 + 2x,$$

und dies ist richtig, da

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

und $x^2 > 0$. Es sei also die Behauptung für n gültig, also

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

Zu zeigen ist die Gültigkeit für $n+1$, also

$$(1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x.$$

Wegen der Gültigkeit der Behauptung für n gilt aber

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x)\\ &> (1+nx)(1+x)\\ &= 1+(n+1)n+nx^2,\end{aligned}$$

und da $nx^2 > 0$, folgt

$$(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x.$$

qed

Nun erhält man abschließend auch

<u>**Satz 6:**</u> **Allgemeine Mittelungleichung**:
Es seien $n \in \mathbf{N}$ und $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbf{R}^+$. Das α-Mittel sei wie in Definition 1 gegeben. Dann gilt für $\alpha < \beta$

$$\min_i x_i \leq m_\alpha \leq m_\beta \leq \max_i x_i,$$

mit Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

<u>*Beweis:*</u> Der Beweis dieses Satzes sei in mehrere Schritte zerlegt vorgeführt.
a) Es sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $x_1 \leq x_2 \leq \ldots x_n$ und $\alpha < 0$. Wir zeigen

$$x_1 = \min_i x_i \leq m_\alpha.$$

Für $\alpha < 0$ ist die Abbildung $x \to x^\alpha$ auf $\mathbf{R}^+$ streng monoton fallend. Es gilt daher

$$\begin{aligned} & x_1 \leq m_\alpha\\ \Leftrightarrow\quad & x_1 \leq \left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}\\ \Leftrightarrow\quad & n \cdot x_1^\alpha \geq x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha,\end{aligned}$$

und dies ist richtig, da für alle $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt

$$x_1 \leq x_i \Leftrightarrow x_1^\alpha \geq x_i^\alpha.$$

Gleichheit gilt offensichtlich genau für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. qed
b) Es sei wieder o.E.d.A. $x_1 \leq x_2 \leq \ldots x_n$ und $\beta > 0$. Wir zeigen

$$m_\beta \leq \max_i x_i = x_n.$$

Für $\beta > 0$ ist die Abbildung $x \to x^\beta$ streng monoton steigend. Es gilt daher

$$\begin{aligned} & m_\beta \leq x_n\\ \Leftrightarrow\quad & \left(\frac{x_1^\beta + x_2^\beta + \ldots + x_n^\beta}{n}\right)^{1/\beta} \leq x_n\\ \Leftrightarrow\quad & x_1^\beta + x_2^\beta + \ldots + x_n^\beta \leq n \cdot x_n^\beta,\end{aligned}$$

und dies ist richtig, da für alle $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt

$$x_i \leq x_n \Leftrightarrow x_i^\beta \leq x_n^\beta,$$

mit Gleichheit wiederum offensichtlich genau für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. qed

c) Es sei $\alpha < 0 < \beta$. Wir zeigen

$$m_\alpha \leq m_0 \leq m_\beta.$$

Wegen der AM-GM Ungleichung gilt wegen $\alpha < 0$

$$\begin{aligned}
\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n} &\geq \left(x_1^\alpha \cdot x_2^\alpha \cdot \ldots \cdot x_n^\alpha\right)^n, \\
\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} &\leq (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^n \\
\Leftrightarrow \quad m_\alpha \leq m_0, &
\end{aligned}$$

mit Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, und analog wegen $\beta > 0$

$$\begin{aligned}
\left(x_1^\beta \cdot x_2^\beta \cdot \ldots \cdot x_n^\beta\right)^n &\leq \frac{x_1^\beta + x_2^\beta + \ldots + x_n^\beta}{n} \\
\Leftrightarrow \quad (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^n &\leq \left(\frac{x_1^\beta + x_2^\beta + \ldots + x_n^\beta}{n}\right)^{1/\beta} \\
\Leftrightarrow \quad m_0 \leq m_\beta, &
\end{aligned}$$

ebenfalls mit Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. qed

d) Es sei nun $0 < \alpha < \beta$. Wir zeigen

$$m_\alpha < m_\beta.$$

Setzen wir

$$k := m_\alpha = \left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}$$

folgt

$$\frac{m_\beta}{k} = \frac{m_\beta}{m_\alpha} = \left(\frac{\left(\frac{x_1}{k}\right)^\beta + \left(\frac{x_2}{k}\right)^\beta + \ldots + \left(\frac{x_n}{k}\right)^\beta}{n}\right)^{1/\beta},$$

und setzen wir ferner für alle $i = 1, 2, \ldots, n$

$$d_i := \left(\frac{x_i}{k}\right)^\alpha$$

folgt weiters

$$\frac{m_\beta}{k} = \left(\frac{d_1^{\beta/\alpha} + d_2^{\beta/\alpha} + \ldots + d_n^{\beta/\alpha}}{n}\right)^{1/\beta}. \tag{1}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{n}\right)^{1/\alpha} &= \left(\frac{\left(\frac{x_1}{k}\right)^\alpha + \left(\frac{x_2}{k}\right)^\alpha + \ldots + \left(\frac{x_n}{k}\right)^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} \\
&= \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^{1/\alpha} \\
&= \frac{1}{k} \cdot m_\alpha \\
&= 1,
\end{aligned}$$

gilt nun

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = n.$$

Setzen wir für alle $i = 1, 2, \ldots, n$

$$d_i =: 1 + a_i$$

folgt hieraus

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0.$$

Da $\frac{\beta}{\alpha} > 1$, folgt aus der BERNOULLI Ungleichung für alle $i = 1, 2, \ldots, n$

$$d_i^{\beta/\alpha} = (1 + a_i)^{\beta/\alpha} \geq 1 + \frac{\beta}{\alpha} a_i,$$

und somit

$$\begin{aligned} d_1^{\beta/\alpha} + d_2^{\beta/\alpha} + \ldots + d_n^{\beta/\alpha} &\geq n + \frac{\beta}{\alpha}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\ &= n. \end{aligned}$$

Wegen Gleichung (1) gilt also

$$\begin{aligned} \frac{m_\beta}{k} &= \left(\frac{d_1^{\beta/\alpha} + d_2^{\beta/\alpha} + \ldots + d_n^{\beta/\alpha}}{n} \right)^{1/\beta} \\ &\geq \left(\frac{n}{n} \right)^{1/\beta} \\ &= 1 \\ \Leftrightarrow m_\beta &\geq k = m_\alpha, \end{aligned}$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn

$$\begin{aligned} & a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0 \\ \Leftrightarrow\ & d_1 = d_2 = \ldots = d_n = 1 \\ \Leftrightarrow\ & x_1 = x_2 = \ldots = x_n = k. \end{aligned}$$

qed

e) Abschließend sei noch $\alpha < \beta < 0$. Verfährt man genau wie in d), verläuft der Beweis identisch bis zur Anwendung der BERNOULLI Ungleichung. Wegen $0 < \frac{\beta}{\alpha} < 1$ gilt in diesem Fall für alle $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} & d_i^{\beta/\alpha} = (1 + a_i)^{\beta/\alpha} \leq 1 + \frac{\beta}{\alpha} a_i \\ \Rightarrow\ & d_1^{\beta/\alpha} + d_2^{\beta/\alpha} + \ldots + d_n^{\beta/\alpha} \leq n \\ \Leftrightarrow\ & \frac{d_1^{\beta/\alpha} + d_2^{\beta/\alpha} + \ldots + d_n^{\beta/\alpha}}{n} \leq 1, \end{aligned}$$

und da $\beta < 0$, folgt aus Gleichung (1)

$$\begin{aligned} & \frac{m_\beta}{k} = \left(\frac{d_1^{\beta/\alpha} + d_2^{\beta/\alpha} + \ldots + d_n^{\beta/\alpha}}{n} \right)^{1/\beta} \geq 1 \\ \Leftrightarrow\ & m_\beta \geq k = m_\alpha, \end{aligned}$$

mit Gleichheit ebenso wie in d) genau für

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = k.$$

Die Behauptung ist also vollständig bewiesen. qed

2 Die TSCHEBYSCHEFF Ungleichung

Satz 7: TSCHEBYSCHEFF Ungleichung:
Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$ mit

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \quad \text{und} \quad b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$$

oder

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \quad \text{und} \quad b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n,$$

d.h. die Folgen $\langle a_i \rangle$ und $\langle b_i \rangle$ seien gleichgeordnet. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right).$$

Sind die Folgen $\langle a_i \rangle$ und $\langle b_i \rangle$ entgegengesetzt geordnet, gilt

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right).$$

Gleichheit gilt in beiden Fällen genau dann, wenn eine der beiden Folgen konstant ist, also wenn

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n \quad \text{oder} \quad b_1 = b_2 = \ldots = b_n.$$

Wir betrachten drei Beweismöglichkeiten dieser Ungleichung.

Beweis (1): Zunächst beweisen wir folgendes

Lemma: ("Rearrangement Inequality" oder "Hauptsatz")
Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$. Die Summe

$$S := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots a_n b_n$$

ist maximal, wenn die Folgen $\langle a_i \rangle$ und $\langle b_i \rangle$ gleichgeordnet sind, und minimal, wenn die Folgen entgegengesetzt geordnet sind.

Beweis des Lemmas: Es sei $a_r > a_s$. Wir betrachten die beiden Summen

$$S_1 = a_1 b_1 + \ldots + a_r b_r + \ldots + a_s b_s + \ldots + a_n b_n$$

und

$$S_2 = a_1 b_1 + \ldots + a_r b_s + \ldots + a_s b_r + \ldots + a_n b_n,$$

die sich nur in den r-ten und s-ten Summanden unterscheiden. Es gilt

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= a_r b_r + a_s b_s - a_r b_s - a_s b_r \\ &= (a_r - a_s)(b_r - b_s), \end{aligned}$$

und somit

$$b_r > b_s \Leftrightarrow S_1 > S_2 \quad \text{bzw.} \quad b_r < b_s \Leftrightarrow S_1 < S_2.$$

Ist nun $\langle c_1, c_2, \ldots, c_n \rangle$ eine Permutation von $\langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ mit $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$, kann man der Reihe nach im Fall $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ von der Summe

$$\overline{S} = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_n c_n$$

ausgehend, das Element b_i mit kleinstem i, welches nicht an i-ter Stelle der Summe steht, mit dem jeweiligen c_i austauschen, und erhält somit fortschreitend Summen $\overline{S}$, die stets größer werden. Das Maximum ist erreicht, wenn die Folgen gleichgeordnet sind. Diese Argumentation gilt auch für den Fall $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$.

Vertauscht man umgekehrt schrittweise bis $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n$ entgegengesetzt geordnet sind, erhält man auf dieselbe Art die minimale Summe. qed

Fortsetzung von Beweis (1): Sind die Folgen $\langle a_i \rangle$ und $\langle b_i \rangle$ gleichgeordnet, gilt nach dem Lemma

$$\begin{aligned}
a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \\
a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n &\geq a_1 b_2 + a_2 b_3 + \ldots + a_n b_1 \\
a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n &\geq a_1 b_3 + a_2 b_4 + \ldots + a_n b_2 \\
&\vdots \\
a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n &\geq a_1 b_n + a_2 b_1 + \ldots + a_n b_{n-1}.
\end{aligned}$$

Addiert man diese Ungleichungen. folgt

$$\begin{aligned}
n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n) &\geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \\
\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i &\geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right).
\end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn keine Vertauschung der b_i eine Änderung bewirkt, und dies ist genau dann der Fall, wenn eine der beiden Folgen $\langle a_i \rangle$ oder $\langle b_i \rangle$ konstant ist.

Nach demselben Verfahren erkennt man, daß für entgegengesetzte Folgen $\langle a_i \rangle$ und $\langle b_i \rangle$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right).$$

gilt. mit Gleichheit ebenfalls genau wenn eine der beiden Folgen konstant ist. qed

Beweis(2): Es seien die Folgen $\langle a_i \rangle$ und $\langle b_i \rangle$ gleichgeordnet. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right) \\
\Leftrightarrow \quad & n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right) \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (n-1) \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{i \neq j} a_i b_j \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{i \neq j} a_i (b_i - b_j) \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 2 \cdot \sum_{i \neq j} a_i (b_i - b_j) = \sum_{i \neq j} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0.
\end{aligned}$$

Dies ist sicher für gleichgeordnete Folgen richtig, und Gleichheit gilt genau wenn alle Summanden gleich 0 sind, also wenn entweder

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n \quad \text{oder} \quad b_1 = b_2 = \ldots = b_n$$

gilt.
Sind $\langle a_i \rangle$ und $\langle b_i \rangle$ entgegengesetzt geordnet, gilt dieselbe Argumentation mit umgekehrt orientiertem Ungleichungszeichen. qed

Beweis (3): Der Beweis gelingt auch mittels vollständiger Induktion.
Es seien zunächst die Folgen $\langle a_i \rangle$ und $\langle b_i \rangle$ gleichgeordnet. Für $n = 1$ lautet die Behauptung

$$a_1 b_1 \geq \frac{1}{1} \cdot a_1 \cdot b_1,$$

und dies ist offensichtlich richtig. Nun sei die Gültigkeit der Behauptung für n, also

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right)$$

gegeben. Zu zeigen ist die Gültigkeit für $n + 1$, also

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i \geq \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i \right).$$

Um die Schreibweise zu vereinfachen, seien

$$\sum_{i=1}^{n} a_i =: A \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} b_i =: B.$$

Wegen der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i &= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + a_{n+1} b_{n+1} \\ &\geq \frac{1}{n} \cdot AB + a_{n+1} b_{n+1}. \end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt also

$$\frac{1}{n} \cdot AB + a_{n+1} b_{n+1} \geq \frac{1}{n+1} \left(A + a_{n+1} \right) \left(B + b_{n+1} \right).$$

Dies ist aber gleichwertig mit

$$\begin{aligned} & (n+1)AB + n(n+1) a_{n+1} b_{n+1} \geq n \cdot \left(AB + A b_{n+1} + B a_{n+1} + a_{n+1} b_{n+1} \right) \\ \Leftrightarrow \quad & AB + n^2 \cdot a_{n+1} b_{n+1} \geq n \cdot A b_{n+1} + n \cdot B a_{n+1} \\ \Leftrightarrow \quad & \left(A - n \cdot a_{n+1} \right) \left(B - n \cdot b_{n+1} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Falls nun $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1}$ und $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n \leq b_{n+1}$, folgt aber

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i \leq n \cdot a_{n+1},$$

und somit
$$(A - n \cdot a_{n+1}) \leq 0,$$
und analog
$$(B - n \cdot b_{n+1}) \leq 0.$$
Es gilt daher
$$(A - n \cdot a_{n+1})\,(B - n \cdot b_{n+1}) \geq 0.$$
Falls $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1}$ und $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq b_{n+1}$, folgt analog
$$(A - n \cdot a_{n+1}) \geq 0 \quad \text{und} \quad (B - n \cdot b_{n+1}) \geq 0,$$
und somit
$$(A - n \cdot a_{n+1})\,(B - n \cdot b_{n+1}) \geq 0.$$
Gleichheit gilt offensichtlich genau dann, wenn einer dieser beiden Klammerausdrücke gleich 0 ist, und dies gilt genau wenn eine der beiden Folgen konstant ist.

Sind die beiden Folgen entgegengesetzt geordnet, läßt sich diese gesamte Argumentation mit umgekehrtem Ungleichungszeichen durchführen, und es gilt somit in diesem Fall
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right),$$
mit Gleichheit genau wenn eine der beiden Folgen konstant ist. qed

<u>*Bemerkungen:*</u> a): Man kann das Ergebnis auch für mehr als zwei Folgen verallgemeinern. Es läßt sich nämlich auch für k gleichgeordnete Folgen zeigen, daß
$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k} x_{ji}\right) \geq \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_{ji}\right),$$
das heißt, das arithmetische Mittel der Produkte der jeweils i-ten Elemente der gleichgeordneten Folgen ist größer oder gleich dem Produkt der arithmetischen Mittel der Folgen.

b): Mit Hilfe des Lemmas von Beweis (1) (das in der deutschsprachigen Ungleichungsliteratur gelegentlich auch als "Hauptsatz" bezeichnet wird) läßt sich auch die AM-GM Ungleichung beweisen.

Sind nämlich $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^+$ und
$$m_0 = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n},$$
und definiert man
$$a_1 := \frac{x_1}{m_0}, a_2 := \frac{x_1 \cdot x_2}{m_0^2}, \ldots, a_n := \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{m_0^n} = 1$$
und
$$b_1 := \frac{1}{a_1}, b_2 := \frac{1}{a_2}, \ldots, b_n := \frac{1}{a_n} = 1,$$

so sind die Folgen $< a_i >$ und $< b_i >$ sicher entgegengesetzt geordnet, und es gilt daher

$$
\begin{aligned}
& a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq a_1b_n + a_2b_1 + \ldots + a_nb_{n-1} \\
\Leftrightarrow\quad & 1 + 1 + \ldots + 1 \leq \frac{x_1}{m_0} \cdot 1 + \frac{x_1 \cdot x_2}{m_0^2} \cdot \frac{m_0}{x_1} + \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}{m_0^3} \cdot \frac{m_0^2}{x_1 \cdot x_2} + \ldots + \\
& \qquad + \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{m_0^n} \cdot \frac{m_0^{n-1}}{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}} \\
\Leftrightarrow\quad & n \leq \frac{x_1}{m_0} + \frac{x_2}{m_0} + \ldots + \frac{x_n}{m_0} \\
\Leftrightarrow\quad & m_0 \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \\
\Leftrightarrow\quad & (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},
\end{aligned}
$$

mit Gleichheit genau für

$$
\begin{aligned}
& \frac{x_1}{m_0} = \frac{x_1 \cdot x_2}{m_0^2} = \ldots = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x : n}{m_0^n} = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & x_1 = x_2 = \ldots = x_n = m_0.
\end{aligned}
$$

qed

3 Satzgruppe von CAUCHY

<u>Satz 8:</u> **CAUCHY-SCHWARZ-BUNIAKOWSKY Ungleichung**
(kurz auch oft CAUCHY Ungleichung genannt):
Für alle $n \in \mathbf{N}$ und für alle $a_i, b_i \in \mathbf{R}$ gilt

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Gleichheit gilt genau wenn die beiden Vektoren

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{und} \quad (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

proportional sind.

<u>*Beweis:*</u> Wir betrachten zwei Beweismöglichkeiten dieser Ungleichung.
<u>*Beweis (1):*</u> Zunächst betrachten wir einen Beweis mittels vollständiger Induktion.
Für $n = 1$ ist die Behauptung gleichwertig mit

$$(a_1b_1)^2 \leq a_1^2 b_1^2,$$

und dies ist trivialerweise richtig. Es sei also die Behauptung für n gültig. Zu zeigen ist die Gültigkeit für n+1, also

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n+1} b_k^2\right).$$

Dies ist aber gleichwertig mit

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + a_{n+1}b_{n+1}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + a_{n+1}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + b_{n+1}^2\right).$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 + 2a_{n+1}b_{n+1}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) + a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) + a_{n+1}^2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) + b_{n+1}^2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2.$$

Aufgrund der Induktionvoraussetzung, bleibt also nur noch die Gültigkeit von

$$2a_{n+1}b_{n+1}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) \leq a_{n+1}^2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) + b_{n+1}^2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)$$

zu zeigen, und dies gilt wegen

$$\left(a_{n+1}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2} - b_{n+1}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}\right)^2 \geq 0$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow a_{n+1}^2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) + b_{n+1}^2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) &\geq 2a_{n+1}b_{n+1}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}\\ &\geq 2a_{n+1}b_{n+1}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right).\end{aligned}$$

qed

Beweis (2): Wir betrachten für gegebene a_i und b_i die reelle Funktion

$$\begin{aligned} f(x) &= (a_1x-b_1)^2 + (a_2x-b_2)^2 + \ldots + (a_nx-b_n)^2\\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\cdot x^2 - 2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)\cdot x + \sum_{k=1}^{n} b_k^2.\end{aligned}$$

Diese Funktion nimmt wegen ihrer quadratischen Struktur nur nichtnegative Werte an. Es ist daher ihre Diskriminante nicht positiv, und es gilt also

$$4\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $f(x) = 0$, und dies ist gleichwertig mit

$$a_1x - b_1 = a_2x - b_2 = \ldots = a_nx - b_n = 0.$$

Gleichheit gilt also genau dann, wenn die Vektoren

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{und} \quad (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

proportional sind. qed

Um die folgenden Sätze von Hölder und Minkowski beweisen zu können, benötigt man zuerst den folgenden

Satz 9: Für

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

und $a, b \in \mathbf{R}$ gilt

$$a^{1/p} b^{1/q} \le \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \quad \text{falls} \quad p > 1 \quad \text{und}$$
$$a^{1/p} b^{1/q} \ge \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \quad \text{falls} \quad p < 1.$$

Gleichheit gilt genau für $a = b$.

Beweis: Um diesen Satz beweisen zu können, weisen wir zuerst die Gültigkeit des folgenden Lemmas nach.

Lemma: Für alle $x > 0$ gilt

$$x^\alpha - \alpha \cdot x + \alpha - 1 \ge 0 \quad \text{für} \quad \alpha > 1 \quad \text{und} \quad \alpha < 0 \quad \text{und}$$
$$x^\alpha - \alpha \cdot x + \alpha - 1 \le 0 \quad \text{für} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Gleichheit gilt genau für $x = 1$.

Beweis des Lemmas: Für $y > 0$ und $n \in \mathbf{N}$ gilt

$$\frac{y^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{y^n - 1}{n} = \frac{y - 1}{n(n+1)} \cdot \big(n \cdot y^n - y^{n-1} - \ldots - y - 1\big) \ge 0,$$

da für $y > 1$ wegen

$$y^n > y^k > 1 \quad \text{für} \quad 1 \le k < n$$

sowohl

$$y - 1 > 0$$

als auch

$$n \cdot y^n - y^{n-1} - \ldots - y - 1 > 0,$$

und für $0 < y < 1$ wegen

$$1 > y^k > y^n \quad \text{für} \quad 1 \le k < n$$

sowohl

$$y - 1 < 0$$

als auch

$$n \cdot y^n - y^{n-1} - \ldots - y - 1 < 0$$

gelten. Gleichheit gilt genau für $y=1$.
Es gilt daher für alle $n\in\mathbf{N}$:

$$\frac{y^{n+1}-1}{n+1}\geq\frac{y^n-1}{n},$$

und somit für alle $m,n\in\mathbf{N}$, $m>n$:

$$\frac{y^m-1}{m}-\frac{y^n-1}{n}\geq 0$$

mit Gleichheit genau für $y=1$. Setzt man $y:=x^{1/n}$, folgt für alle $x>0$

$$x^{m/n}-1-\frac{m}{n}\cdot(x-1)\geq 0,$$

und es gilt daher

$$x^\alpha-1-\alpha\cdot(x-1)\geq 0 \quad \text{für} \quad \alpha>1 \quad \text{und} \quad \alpha\in\mathbf{Q},$$

mit Gleichheit genau für $x=1$. Ist $\alpha\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ und $\alpha>1$, führt jede Folge $<\alpha_i>$ mit $\alpha_i\in\mathbf{Q}$ und $\lim\limits_{i\to\infty}=\alpha$ zur Behauptung für α. Es wäre denkbar, daß danach Gleichheit zusätzlich zum Fall $x=1$ auch für ein $x\neq 1$ gelten könnte. Sei aber $\alpha=r\cdot\beta$, mit $r,\beta>1$ und $r\in\mathbf{Q}$. Dann gilt wegen

$$y^r-r\cdot y+r-1>0\Leftrightarrow y^r-1>r\cdot y-r$$

für $y\neq 1$, auch

$$\begin{aligned} x^\alpha-\alpha\cdot x+\alpha-1 &= \left(x^\beta\right)^r-r\cdot\beta\cdot x+r\cdot\beta-1\\ &> r\cdot x^\beta-r\cdot\beta\cdot x+r\cdot\beta-r\\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Die Gleichheit in

$$x^\alpha-\alpha\cdot x+\alpha-1\geq 0 \quad \text{für} \quad \alpha>1,\alpha\in\mathbf{R}$$

gilt also nur für $x=1$.
Setzt man

$$x^\alpha=x^{1-\beta}=y^{\beta-1}$$

für $\alpha>1$, folgt für $\beta<0$

$$\begin{aligned} & y^{\beta-1}-(1-\beta)\cdot y^{-1}+(1-\beta)-1\geq 0\\ \Leftrightarrow\ & y^{-1}\cdot\left(y^\beta-\beta\cdot y+\beta-1\right)\geq 0 \end{aligned}$$

für $y>0$ mit Gleichheit genau für $y=1$. Setzt man

$$x^\alpha=x^{1/\beta}=y$$

für $\alpha>1$, folgt für $0<\beta<1$

$$\begin{aligned} & y-\frac{1}{\beta}\cdot y^\beta+\frac{1}{\beta}-1\geq 0\\ \Leftrightarrow\ & y^\beta-\beta\cdot y+\beta-1\leq 0 \end{aligned}$$

für $y>0$ mit Gleichheit genau für $y=1$. qed

Beweis von Satz 9: Setzt man in den Ungleichungen

$$\begin{aligned} x^\alpha - \alpha \cdot x + \alpha - 1 &\geq 0 \quad \text{für} \quad \alpha > 1 \quad \text{und} \quad \alpha < 0 \quad \text{bzw.} \\ x^\alpha - \alpha \cdot x + \alpha - 1 &\leq 0 \quad \text{für} \quad 0 < \alpha < 1. \end{aligned}$$

für alle $x > 0$

$$\alpha =: \frac{1}{p}; 1 - \alpha =: \frac{1}{q}; x =: \frac{a}{b} \quad (a, b > 0),$$

folgt für $p < 1$ ($\Leftrightarrow \alpha > 1 \vee \alpha < 0$)

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^{1/p} - \frac{1}{p} \cdot \frac{a}{b} - \frac{1}{q} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a^{1/p} b^{-1/p} \geq \frac{a}{bp} + \frac{1}{q} \\ &\Leftrightarrow \quad a^{1/p} b^{1/q} \geq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \end{aligned}$$

und analog für $p > 1$ ($\Leftrightarrow 0 < \alpha < 1$)

$$a^{1/p} b^{1/q} \geq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Gleichheit gilt genau für $x = 1 \Leftrightarrow a = b$. qed

Dieses Ergebnis kann auch für $p > 1$ und $q > 1$ folgendermaßen gedeutet werden. Es seien $\frac{1}{p} =: \lambda$ und $\frac{1}{q} =: \mu$. Die Aussage

$$\begin{aligned} & a^\lambda b^\mu \leq \lambda \cdot a + \mu \cdot b \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda \cdot \ln a + \mu \cdot \ln b \leq \ln(\lambda \cdot a + \mu \cdot b) \end{aligned}$$

bedeutet somit nichts anderes als die Konvexität der ln Funktion (siehe auch Kapitel 4).

<u>Satz 10:</u> HÖLDER Ungleichung:
Es seien $x_i, y_i \geq 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für $p > 1$ gilt

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}.$$

Für $p < 1$ (mit $p \neq 0$ und $x_i y_i \neq 0$ falls $p < 0$) gilt die umgekehrte Ungleichung. Gleichheit gilt genau für $x_i^p = \lambda \cdot y_i^q$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$.

Beweis: Nach Satz 9 gilt für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $a, b \in \mathbf{R}^+$

$$\begin{aligned} a^{1/p} b^{1/q} &\leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \quad \text{falls} \quad p > 1 \quad \text{und} \\ a^{1/p} b^{1/q} &\geq \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \quad \text{falls} \quad p < 1 \end{aligned}$$

mit Gleichheit genau für $a = b$. Setzt man

$$\begin{aligned} a &= \frac{x_i^p}{X} \quad \text{mit} \quad X = \sum_{i=1}^n x_i^p \quad \text{und} \\ b &= \frac{y_i^q}{Y} \quad \text{mit} \quad Y = \sum_{i=1}^n y_i^q, \end{aligned}$$

folgt daraus für $p > 1$

$$\frac{x_i y_i}{X^{1/p}Y^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{x_i^p}{X} + \frac{1}{q} \cdot \frac{y_i^q}{Y},$$

und summiert man über i, folgt weiters

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{X^{1/p}Y^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}{X} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^q}{Y} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq X^{1/p}Y^{1/q} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}.$$

Die umgekehrte Ungleichung folgt analog für $p < 1$, $p \neq 0$ und $x_i y_i \neq 0$ falls $p < 0$.
Gleichheit gilt genau für

$$a = b \Leftrightarrow \frac{x_i^p}{X} = \frac{y_i^q}{Y}$$

für alle $i = 1, 2, \ldots, n$. Da diese Beziehung invariant bleibt bei Multiplikation aller x_i^p bzw. y_i^q mit einem fixen λ, ist dies gleichwertig mit

$$x_i^p = \lambda \cdot y_i^q$$

für alle $i = 1, 2, \ldots, n$. qed

Bemerkungen: a) Durch Induktion folgt hieraus unmittelbar die Verallgemeinerte HÖLDER Ungleichung:
Es seien $x_{ij} \geq 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$ und $j = 1, 2, \ldots, m$ und $p_j > 1$ für alle $j = 1, 2, \ldots, m$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j} = 1.$$

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} x_{ij} \leq \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{p_j}\right)^{1/p_j},$$

mit Gleichheit genau wenn die Vektoren

$$\left(x_{i1}^{p_1}\right), \left(x_{i2}^{p_2}\right), \ldots, \left(x_{im}^{p_m}\right)$$

linear abhängig sind.

b) Die CAUCHY Ungleichung ist genau der Spezialfall der HÖLDER Ungleichung für $p = q = 2$.

Aus der HÖLDER Ungleichung folgt die Dreiecksungleichung im n-dimensionalen Vektorraum bei Verwendung der p-Norm, also

$$\|\vec{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}.$$

Es ist dies der

Satz 11: **MINKOWSKI Ungleichung**:
Es seien $x_i, y_i \geq 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Für $p > 1$ gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}.$$

Für $p < 1$ ($p \neq 0$, $x_i y_i \neq 0$ falls $p < 0$) gilt die umgekehrte Ungleichung. Gleichheit gilt genau wenn $x_i = \lambda \cdot y_i$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$

Beweis: Es gilt nach der HÖLDER Ungleichung (Satz 10) wegen

$$1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q} \Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1}$$

für $p > 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p &= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot (x_i + y_i)^{p-1} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/q} \\
&\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p},
\end{aligned}$$

mit Gleichheit genau für

$$\begin{aligned}
& x_i^p = \overline{\mu} \cdot (x_i + y_i)^{q(p-1)} = \mu \cdot y_i^p \\
\Leftrightarrow \quad & x_i = \overline{\lambda} \cdot (x_i + y_i) = \lambda \cdot y_i
\end{aligned}$$

für alle $i = 1, 2, \ldots, n$. Der Beweis für $p < 1$ verläuft analog. qed

Durch Induktion folgt hieraus unmittelbar die verallgemeinerte MINKOWSKI Ungleichung:
Es seien $x_{ij} \geq 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ und $j = 1, 2, \ldots, m$. Für $p > 1$ gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\right)^p\right)^{1/p} \leq \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^p\right)^{1/p}.$$

Für $p < 1$ ($p \neq 0$, $x_{ij} \neq 0$ falls $p < 0$) gilt die umgekehrte Ungleichung. Gleichheit gilt genau wenn die Vektoren

$$(x_{i1}), (x_{i2}), \ldots, (x_{in})$$

linear abhängig sind.

4 Konvexe Funktionen

Definition 2: Es sei $T = [a, b]$ ein Intervall und g eine Abbildung von T in $\mathbf{R}$. g heißt "konvex", wenn für alle $x_1, x_2 \in T$

$$g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{g(x_1) + g(x_2)}{2}$$

gilt. g heißt "streng konvex", wenn Gleichheit nur für $x_1 = x_2$ gilt.

Satz 12: Es sei $T = [a, b]$ und $g : T \to \mathbf{R}$ streng konvex. Dann gilt für alle $x_1, x_2, \ldots, x_n \in T$ mit $n \in \mathbf{N}$ und $n > 2$

$$g\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{g(x_1) + g(x_2) + \ldots + g(x_n)}{n},$$

mit Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Beweis: Der Beweis verläuft mittels Vorwärts-Rückwärts-Induktion. Die Richtigkeit der Behauptung für $n = 2$ ist ein Teil der Voraussetzungen. Für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ lautet die Behauptung

$$g(x_1) \leq \frac{n \cdot g(x_1)}{n},$$

und hier gilt offensichtlich Gleichheit. Wir nehmen also ohne Einschränkung der Allgemeinheit $x_1 \neq x_2$ an, und wollen für diesen Fall die "<"-Relation nachweisen.
Es gelte für ein bestimmtes m

$$g\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}{m}\right) \leq \frac{g(x_1) + g(x_2) + \ldots + g(x_m)}{m}.$$

Wir zeigen zunächst die Gültigkeit der Behauptung für $n = 2m$. Es gilt in diesem Fall wegen $x_1 \neq x_2$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) &= g\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2} + \ldots + \frac{x_{2m-1}+x_{2m}}{2}}{m}\right) \\ &\leq \frac{g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + g\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) + \ldots + g\left(\frac{x_{2m-1}+x_{2m}}{2}\right)}{m} \\ &< \frac{\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2} + \frac{g(x_3)+g(x_4)}{2} + \ldots + \frac{g(x_{2m-1})+g(x_{2m})}{2}}{m} \\ &= \frac{g(x_1) + g(x_2) + \ldots + g(x_n)}{n}. \end{aligned}$$

Die Gültigkeit der Behauptung für $n = 2^k$ ist also gezeigt. Ist n keine 2er-Potenz, existiert ein $m \in \mathbf{N}$, sodaß

$$2^{m-1} < n < 2^m.$$

Bezeichnet man $p := 2^m - n$, folgt wegen der Gültigkeit der Behauptung für 2^m (wieder bei $x_1 \neq x_2$ o.E.d.A.)

$$g\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n + y_1 + \ldots + y_p}{n + p}\right) < \frac{g(x_1) + \ldots + g(x_n) + g(y_1) + \ldots + g(y_p)}{n + p}.$$

Setzt man

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_p = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

folgt

$$g\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n + y_1 + \ldots + y_p}{n + p}\right) = g\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$$

und

$$\frac{g(x_1)+\ldots+g(x_n)+g(y_1)+\ldots+g(y_p)}{n+p}=\frac{g(x_1)+\ldots+g(x_n)+p\cdot g\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)}{n+p}.$$

Es gilt daher

$$\begin{aligned}
& g\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)<\frac{g(x_1)+\ldots+g(x_n)+p\cdot g\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)}{n+p} \\
\Leftrightarrow\quad & (n+p)\cdot g\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)<g(x_1)+\ldots+g(x_n)+p\cdot g\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & g\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)<\frac{g(x_1)+g(x_2)+\ldots+g(x_n)}{n}.
\end{aligned}$$

qed

Eine etwas allgemeinere Version dieses Satzes ist die JENSEN Ungleichung:
Es sei g eine konvexe Funktion mit $g: T\rightarrow \mathbf{R}$ und $T=[a,b]$.

Dann gilt für $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in[0,1]$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ und $x_1,x_2,\ldots,x_n\in T$

$$g\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot x_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot g(x_i).$$