

Ungleichungsaufgaben

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen (1 bis 4):

1) $(2x+3)(4x-8) + (x+1)^2 > 9(x-1)(x+1) + 4.$

2) $\frac{a^2}{a+3} \leq \frac{4}{3} + a.$

3) $2x^2+6x-8 < 0.$

4) $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3) \geq 5.$

5) Man bestimme alle natürlichen Zahlen n , für die $3^n > n^2-2n+91$ gilt.

Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Ungleichungen:

6) Man zeige, dass für alle positiven reellen Zahlen a und alle reellen Zahlen b mit $0 < b < 1$ folgende Ungleichung gilt:

$$\sqrt{a+1} - \sqrt{a}\sqrt{b} \geq \sqrt{1-b}.$$

7) Man beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b die folgende Ungleichung gilt:

$$a^3 + b^3 + a + b \geq 4ab.$$

8) Man beweise für alle positiven ganzen Zahlen:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Hinweis: Dies kann man wahlweise mit der AM-GM Ungleichung oder mittels vollständiger Induktion machen, wobei die erste Möglichkeit deutlich kürzer ist!