

Suchen nach der schönsten Aufgabe - Wie entstehen mathematische Wettbewerbe?

Robert Geretschläger, Graz

ÖMG Lehrertag, Universität Wien am 29.4.2011

Die meisten Teilnehmer und Teilnehmerinnen an mathematischen Wettbewerben machen sich wohl kaum darüber Gedanken, wie die Aufgaben für den jeweiligen Wettbewerb ausgesucht werden. Man erwartet einfach, dass die Aufgaben korrekt, fachlich packend, lösbar und möglichst originell sein sollen. Die Prozesse, die zur Aufgabenauswahl führen, sind aber komplex und interessant, mit vielen inhaltlichen und organisatorischen Aspekten, an die man normalerweise nur denkt, wenn man selbst daran beteiligt ist.

Anhand der Beispiele der Internationalen Mathematikolympiade und des Känguru der Mathematik möchte ich im Folgenden einen Einblick in die Hintergründe der Auswahlprozesse derartiger Wettbewerbe geben, und auf einige relevante Fragen dazu eingehen. Wie werden Aufgaben für die Wettbewerbe entwickelt und wer schlägt sie vor? Wie werden sie ausgewählt, welche scheiden aus? Wie weit wird der Zusammenhang zu Lehrplänen und zum Schulalltag berücksichtigt? Welche Rolle spielt fachliche und fachdidaktische Forschung bei der Aufgabenauswahl?

1 Organisationsformen der großen internationalen Mathematikwettbewerbe

Die Internationale Mathematikolympiade (kurz IMO) ist gewissermaßen die Königsklasse der mathematischen Schülerwettbewerbe. Seit 1959 messen sich dabei alljährlich die besten sechs (früher acht) Schüler/innen jedes teilnehmenden Landes im Beweisen von Sätzen aus dem Bereich der reinen Mathematik. Waren es zu Beginn noch sieben Nationen, die Teilnehmer und Teilnehmerinnen zum Wettbewerb entsandten, erwartet man für die heurige 52. IMO in den Niederlanden fast 600 Teilnehmer und Teilnehmerinnen aus 105 Nationen.

Zur Teilnahme an der IMO qualifiziert man sich in den meisten Ländern über die jeweiligen nationalen Olympiaden, und auch in Österreich führt der Weg zum IMO seit 42 Jahren über die Österreichische Mathematikolympiade (ÖMO). Bei der IMO treffen sich viele der begabtesten und begeistertsten Jungmathematiker/innen aus der ganzen Welt, und für viele von ihnen beginnt mit ihrer IMO-Teilnahme eine wissenschaftliche Karriere in Forschung oder Lehre.

Eine typische (leichtere) IMO Aufgabe ist etwa die folgende erste Aufgabe der 51. IMO 2010:

Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, so dass die Gleichung

$$f(\lfloor xy \rfloor) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$$

für alle $x, y \in \mathbf{R}$ gilt. (Hierbei bezeichnet $\lfloor z \rfloor$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als z ist.)

Es läßt sich leicht bestätigen, dass jede Funktion der Gestalt $f(x) = c$ mit $c = 0$ oder $1 \leq c < 2$ diese Bedingung erfüllt. Nicht ganz so leicht ist es nachzuweisen, dass dies keine andere Funktion kann. Immerhin 295 Teilnehmer/innen ist dies beim Wettbewerb fehlerlos gelungen.

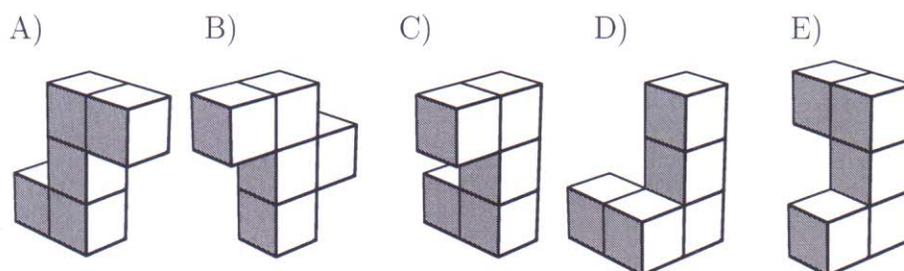
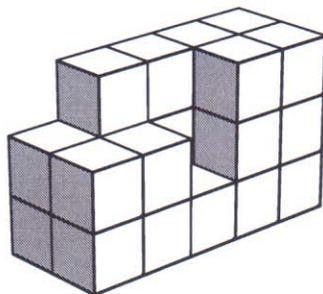
Ist die IMO so etwas wie die Weltmeisterschaft für Schüler/innen in der reinen Mathematik, so ist das Känguru der Mathematik so etwas wie der zugehörige Breitensport. Die Intention des Kängurus (der seinen Namen vom schon länger durchgeführten Australian Mathematics

Competition ableitet) ist es, möglichst vielen Schüler/innen zu zeigen, wie viel Spaß das logische Spielen beim Lösen mathematischer Aufgaben machen kann.

Der Wettbewerb in der jetzigen Form wurde 1991 in Frankreich initiiert, und wird seit 1995 international durchgeführt. In Österreich gibt es ihn seit 1999 als nationalen Bewerb. In diesem Jahr (2011) haben in 51 Länder bereits 6 Millionen Teilnehmer die im multiple choice Format konzipierten Aufgaben aus den fünf Alterskategorien zu beantworten versucht.

Eine typische Känguruaufgabe ist etwa die folgende Aufgabe 6 aus der Kategorie Benjamin (für die 5. und 6. Schulstufe) des Jahres 2011:

Welchen der folgenden Teile brauche ich, um den abgebildeten Quader zu vervollständigen?



Die richtige Antwort ist natürlich E.

Die Bedeutungen dieser Aktivitäten für die Schule sind vielfältig. Die Popularisierung des Faches Mathematik wird mit einer Vielzahl verschiedenartiger Aktionen vorangetrieben, und das Känguru reiht sich darunter ein. Wer schon einmal die Stunden und Tage nach einem solchen Wettbewerb in der Schule miterlebt hat, weiß wie sehr die Aufgaben zu angeregten fachlichen Diskussionen unter den Teilnehmer/innen führen. Ein schöneres Indiz für die Wirkung der Aufgaben kann man sich in der Schule wohl nicht wünschen. Natürlich ergeben sich beim Känguru, wie bei jedem Wettbewerb, irgendwelche Sieger, und unter ihnen gibt es oft mathematische Talente zu entdecken, deren Neigung zum Fach aus verschiedenen Gründen im alltäglichen Unterricht vielleicht nicht so sehr aufgefallen sein mag. Dies ist zumindest auch ein angenehmer Nebenaspekt des Känguruwettbewerbs.

Den wohl wichtigsten Aspekt der Mathematikolympiade in Bezug auf die Schule stellen wohl die Vorbereitungskurse dar. Diese ermöglichen interessierten Schüler/innen eine vertiefte Auseinandersetzung mit den Inhalten der reinen Mathematik, wie sie in unserer Schulorganisation sonst nirgends möglich sind. Die Wettbewerbe am Ende des Prozesses geben den Impuls zu dieser Auseinandersetzung, aber der Hauptgewinn liegt für die meisten im Kurs selbst.

2 Der Aufgabenauswahlprozess der IMO

Die Auswahl der Aufgaben für die IMO ist (derzeit noch) im höchsten Maß demokratisch. Im folgenden wird das Verfahren beschrieben, das im Wesentlichen seit Beginn der IMO vor über 50 Jahren besteht, das aber schon in den nächsten Jahren möglicherweise grundlegend verändert werden wird.

Zunächst sind alle teilnehmenden Länder dazu eingeladen, bis zu sechs Aufgabenvorschläge an das Veranstalterland zu senden. Üblicherweise kommen Aufgabenvorschläge aus etwa einem Drittel der Länder, und so treffen jährlich über hundert mögliche Aufgaben samt Lösungen ein. Jedes Veranstalterland setzt ein Komitee ein, um eine Vorauswahl unter den eingesendeten Aufgaben zu treffen. Dieses Aufgabenkomitee besteht aus Fachleuten des Veranstalterlandes, meist von den Universitäten, und wird gelegentlich durch einige eingeladene internationale Mitglieder ergänzt. (Internationale Mitglieder zum Aufgabenkomitee einzuladen ist in den letzten Jahren immer üblicher geworden. So was auch ich im Jahr 2006 Gastmitglied im Aufgabenkomitee in Slowenien.)

Das Aufgabenkomitee rechnet alle vorgeschlagenen Aufgaben durch. Dieser Prozess dauert einige Wochen, da die vorgeschlagenen Aufgaben natürlich nicht einfach sind. Es ist die Aufgabe dieser Gruppe, die bestgeeigneten Aufgaben aus den Vorschlägen herauszusieben. Es sollen also solche Aufgaben eliminiert werden, die zu leicht oder zu schwer für den Wettbewerb sind, sowie solche, die schon in der Literatur bekannt sind oder bei anderen Wettbewerben verwendet wurden. Letzteres ist nicht immer leicht, da es international eine Vielzahl von Wettbewerben gibt, und nicht alles in Büchern oder im Internet zur Verfügung steht. Schließlich erstellt das Aufgabenkomitee die sogenannte Short List, die aus etwa 20 Aufgaben besteht. Unter diesen sollen sich geeignete Aufgaben aus allen vier üblichen Fachbereichen (Geometrie, Zahlentheorie, Algebra und Kombinatorik) finden, und in allen Schwierigkeitsgraden (leicht, mittel und schwer). Wenn eine Aufgabe mehrere Lösungswege zulässt, sollte dies vom Komitee erkannt und bearbeitet sein. Aufgaben, die mit "Brachialmethoden", also reinen standard Rechenansätzen ohne originelle Idee, gelöst werden können, sollen in der Short List nicht vorkommen.

Von der Short List entstehen sodann gedruckte Versionen, beide nur in englischer Sprache, und zwar eine ohne Lösungen und eine mit allen bekannten Lösungsvarianten. Wenn die Delegationleiter zum Wettbewerb anreisen (einige Tage vor den Teilnehmer/innen), erhalten sie zunächst die Short List Variante ohne Lösungen ausgehändigt. Es ist die Aufgabe der Jury, bestehend aus der Gruppe der nationalen Delegationsleiter, die endgültige Auswahl aus der Short List durchzuführen, und der Grundgedanke besteht darin, die Aufgaben zunächst ohne Lösungen kennen zu lernen, da Aufgaben mit bekannter Lösung immer einfacher erscheinen als sie tatsächlich sind. Schon nach ein oder zwei Tagen bekommen aber alle Jurymitglieder die Version mit Lösungen, und so ist auch allen zu diesem Zeitpunkt zumindest eine Lösungsmöglichkeit für jede Aufgabe bekannt.

Die Jury hat nun die Aufgabe, die Vorschläge genauer zu studieren. Sind irgendwelche Aufgaben bekannt (etwa weil sie gerade in einem nationalen Wettbewerb verwendet wurden), so soll dies bekanntgegeben werden, und diese Aufgaben werden aus der Liste gestrichen. Zusätzlich werden alternative Lösungsmöglichkeiten erarbeitet, die dem Aufgabenkomitee entgangen sein mögen, und auch diese werden kurzfristig allen Jurymitgliedern zur Verfügung gestellt.

Nun müssen die tatsächlichen Wettbewerbsaufgaben in einigen Jurysitzungen festgelegt werden. Dies geschieht meist so, dass zunächst mögliche Paare "leichter" Aufgaben (also Kandidaten für die Aufgaben 1 und 4) vorgeschlagen werden. Über alle Paare wird (nach längerer Diskussion über die relativen Meriten der Aufgaben) immer wieder abgestimmt, und jeweils das schlechtestplatzlierte Paar aus der Liste gestrichen. Dieser Prozess wird fortgesetzt bis nur mehr ein Paar verbleibt. Der Prozess wird nun für die "schweren" Aufgaben (also die Aufgaben 3 und 6) wiederholt. (In manchen Jahren wird diese Reihenfolge umgedreht; auch darüber wird abgestimmt.) Dabei wird schon berücksichtigt, welche Fachbereiche bereits unter den ausgewählten Aufgaben vorkommen, da es jedenfalls ein konsensuales Ziel ist, unter den sechs Aufgaben des Wettbewerbs jedenfalls mindestens eine aus jedem der vier Fachbereiche zu haben. Wenn es schließlich um die Wahl der Aufgaben für die "mittleren" Aufgaben ansteht, wiederholt sich der ganze Prozess ein drittes Mal, wobei die Zuordnung der Aufgaben zu den Fachbereichen in der Diskussion noch stärkere Berücksichtigung findet.

Nachdem die Aufgaben ausgewählt worden sind, wird die Reihenfolge der Aufgaben beim Wettbewerb festgelegt, wobei eine Vorgabe darin besteht, an keinem Tag zwei Aufgaben aus demselben Fachbereich zu stellen. Meist wird versucht die Aufgabe 6 so zu wählen, dass sie den mathematisch interessantesten Inhalt repräsentiert. In einer Sitzung der englisch-sprachigen Länder (zu dem aber auch Vertreter anderer Länder willkommen sind) wird die offizielle englische Sprachversion hergestellt, die dann von der Jury nach ausführlicher Diskussion als gültig beschlossen wird. Darauf folgen die Übersetzungen in die Versionen der übrigen offiziellen IMO-Sprachen (Deutsch, Französisch, Spanisch und Russisch), die dann ebenfalls nach etwaiger Diskussion von der gesamten Jury als gültig beschlossen werden. Die restlichen Sprachversionen werden schließlich von diesen ausgehend hergestellt, und dann zur Kontrolle ausgestellt. Die Jury beschließt nach etwaig notwendigen Veränderungen auch formal die Gültigkeit dieser Versionen, und es steht dem Wettbewerb nichts mehr im Wege.

Um die Koordination der Schülerarbeiten zu ermöglichen wird nun ein Korrekturschema für die Aufgaben erstellt. Dies wird von den lokalen Koordinationsteams entworfen, von der Jury ausführlich diskutiert, und wiederum nach erfolgter Anpassung an die Diskussionen von der Jury beschlossen.

All diese Schritte sind recht zeitaufwändig, aber zur Qualitätskontrolle sehr wichtig, und auch aus diplomatischen Gründen unumgänglich.

Nachdem nun der Prozess zur Aufgabenauswahl besprochen ist, stellt sich natürlich die Frage, welche Aufgaben denn eine Aussicht haben, in diesem Prozess ausgewählt zu werden. Tatsächlich ist die Bandbreite der Kandidaten auch relativ klar abgesteckt, wobei die Gründe dafür teils historisch und teils praktisch bedingt sind.

Zunächst wäre festzustellen, dass nur solche Aufgaben, die dem IMO-„Curriculum“ entsprechen Aussicht auf Auswahl haben. Dieses Curriculum wurde zwar nie offiziell beschlossen, ist aber dennoch gültig. Es entspricht einem de facto Konsens über Aufgaben aus dem Bereich der reinen Mathematik, die in aller Welt in den Schulen zumindest in den weiter abgesteckten Bereich rund um die Schullehrpläne zu finden sind. Wie bereits erwähnt, werden diese Aufgaben üblicherweise in vier Kategorien unterteilt: Algebra, Geometrie, Kombinatorik und Zahlentheorie. Darunter versteht man für Zwecke der IMO in etwa Folgendes:

- Algebra

Zu diesem Bereich zählen Aufgaben zu den Themen Funktionalgleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme. Es wird in den letzten Jahren immer schwerer geeignete Aufgaben aus diesem Bereich zu finden, da die meisten derartigen Aufgaben mit Werkzeug geknackt werden können, das von allen Spitzenteilnehmern vollständig beherrscht wird.

- Geometrie

Hierunter versteht man Aufgaben aus der ebenen euklidischen Geometrie, vorzugsweise mit klassischen euklidischen Methoden lösbar. Es sind zwar bei Wettbewerb alle Arten von Argumenten erlaubt, aber bei der Auswahl wird darauf Rücksicht genommen, dass zumindest ein solcher klassischer Beweis möglich ist. Es wird auch darauf geachtet, dass analytische Lösungen zu Komplikationen führen, da analytische Beweise als minderwertig erachtet werden. Räumliche Aufgaben gibt es heutzutage praktisch nicht mehr, obwohl sie in den Anfangsjahren der IMO in jedem Jahr auf den Angabeblättern zu finden waren.

- Kombinatorik

Zu diesem Bereich zählen nicht nur traditionelle Zählaufgaben, sondern auch Aufgaben, die man im weiteren Sinne der Spieltheorie zuordnen könnte, bei denen es um mathematische Spiele und deren Gewinnstrategien geht. Letztere werden besonders gerne ausgewählt,

da sie gute, originelle Ideen belohnen und meist nicht leicht mit eingelernten Strategien bewältigt werden können.

- Zahlentheorie

Zu diesem Bereich zählen Aufgaben zur Teilbarkeit, diophantische Gleichungen und dergleichen aus dem Bereich der klassischen Zahlentheorie.

Zu jedem Wettbewerb wird also zumindest je eine Aufgabe aus diesen vier Bereichen ausgewählt, und niemals drei aus einem Bereich. Es gibt aber auch weitere, teils anerkannte und teils unterschwellige Kriterien für die Aufgabenauswahl.

Wie bereits erwähnt, müssen die Aufgaben originär sein. Sie dürfen nicht in dieser oder ähnlicher Form in der Problemliteratur vorkommen oder bei einem Wettbewerb verwendet worden sein. Sie dürfen auch nicht in dieser oder ähnlicher Form beim Training einer Mannschaft behandelt worden sein. Es wird also auf die Ehrlichkeit der Mannschaftsbetreuer gesetzt, um derartiges möglichst sicher ausschließen zu können. Natürlich kann, bei der immer wachsenden Zahl von veröffentlichten und verwendeten Aufgaben, auch einmal eine bekannte Aufgabe durchrutschen, aber es wird viel Aufwand investiert um dies möglichst zu verhindern.

Weiters sollen die Aufgaben "schön" sein, was das auch immer heißen soll. Im Regelfall bedeutet dies entweder, dass eine sehr kurze Angabe in der Lösung zu unerwarteten Verwicklungen führt, oder dass eine komplex anmutende Aufgabe eine sehr knappe Lösung zulässt, die aber eine geniale Idee voraussetzt. Natürlich sind Geschmäcker verschieden, und nicht jeder findet dieselben Aufgaben schön. Bei besonders gelungenen Aufgaben ist es aber meistens leicht, übereinstimmende Meinungen dazu zu finden.

Besonders bei den "schweren" Aufgaben 3 und 6 legen manche Spitzenländer darauf Wert, dass die Aufgaben eine Relevanz zur Forschungsmathematik haben sollen. Manche Länder beziehen ihre Finanzierung von den Universitäten, und eine derartige Platzierung von Forschungsinhalten wird von ihnen benötigt, um die nationale Mathematikolympiade als forschungsrelevant zu positionieren. Gegen diese Einstellung steht der Zugang vieler "schwächerer" Länder (die also nicht unbedingt immer mit Medaillen rechnen können), die besonders darauf Wert legen würden, dass die "leichten" Aufgaben 1 und 4 auch für ihre Schüler/innen lösbar sein sollen. Für die stärkeren Länder gelten derartige Aufgaben oft als "trivial", und dieser Widerspruch führt zwangsläufig immer zu heftigen Diskussionen.

Einig ist man sich vielmehr auf die Tatsache, dass die Aufgaben möglichst wenig Technik voraussetzen sollen, und möglichst eine gute Lösungsidee voraussetzen, die nicht jeder in der Wettbewerbszeit haben wird. Derartige Aufgaben sind rar und sehr gefragt.

Natürlich gibt es bei der IMO Aufgabenauswahl auch so etwas wie Modeerscheinungen. Zu Beginn der IMO gab es immer Aufgaben aus der Raumgeometrie, und so etwas ist heutzutage fast auszuschließen. Einige Jahre lang gab es immer Gleichungssysteme zu lösen, heutzutage gilt dieser Bereich als verbraucht, da die alten Tricks allen (gut Trainierten) bekannt sind, und kaum neue auftreten. Ähnliches gilt auch für Funktionalgleichungen und symmetrische Ungleichungen in drei Variablen. Die Modeströmungen werden sich sicher in den nächsten Jahren auch wieder innerhalb des Rahmens weiter verschieben.

Die Dynamik der Aufgabenauswahl ist interessant zu beobachten. Während der Großteil der Jurymitglieder möglichst korrekt zu arbeiten versucht, gibt es doch solche, die sich vor allem davon leiten lassen, was sie für ihre eigene Mannschaft für das Günstigste halten. Ob sie sich bei ihrer Meinung dabei irren steht dann freilich auf einem anderen Blatt geschrieben. Die Diskussionen um die Aufgaben sind auch deswegen mangelhaft, weil nicht alle in der Jury über ausreichende Englischkenntnisse für eine aktive Teilnahme verfügen. Leider gibt es auch einige wenige, deren Mathematikkenntnisse eine solche aktive Diskussionsteilnahme ausschließen. Diese Tatsachen führen gelegentlich zu einem gewissen Blockverhalten bei den Abstimmungen, aber im Großen

und Ganzen kann man schon sagen, dass die Diskussionen um die Aufgaben fair, sachlich und kompetent geführt werden.

Die Zukunft der IMO scheint sehr positiv. Die Zahl der Teilnehmenden Länder wächst ständig, was für eine breite Akzeptanz des Wettbewerbskonzepts in der internationalen akademischen Welt spricht. Dieses ständige Wachstum bringt freilich auch Probleme. So ist es immer schwerer, Veranstalter für die IMO zu finden, da von einem Veranstalterland nicht nur die wissenschaftliche Infrastruktur erwartet wird, sondern auch die Finanzierung der gesamten Veranstaltung. Dem wird in den nächsten fünf Jahren durch das zugesagte Sponsoring von Google in der Höhe von einer Million Euro etwas abgeholfen, aber auch mit diesem Geld ist es teuer eine IMO zu veranstalten. Derzeit wird diskutiert, ob die gesamte Aufgabenauswahl in Zukunft von einer Komitee übernommen werden soll, ähnlich dem derzeitigen Aufgabenkomitee. Dies würde dazu führen, dass die Aufgabe der Jury erst mit der Übersetzung und dem Beschluss der Punkteschlüssel beginnen würde, was auch den Aufenthalt der Jüry verkürzen und somit verbilligen würde. Ob diese Änderung durchgeführt wird muss aber erst diskutiert und beschlossen werden.

3 Der Aufgabenauswahlprozess beim Känguru der Mathematik

Im Vergleich zur Vorgangsweise bei der IMO, bei der jede Jurysitzungen ein klein wenig an eine Sitzung der UNO Generalversammlung erinnert, ist die Organisation der Aufgabenauswahl beim Känguru der Mathematik immer noch auf lockerere Diskussion und freundschaftlichen Konsens aufgebaut. Immer mehr aber werden durch das ständige Wachsen der Organisation ähnliche Strukturen auch hier notwendig.

Aufgaben werden für den Känguru ebenso wie für die IMO zunächst von den teilnehmenden Ländern vorgeschlagen. Seit zwei Jahren gibt es zum Zweck der Aufgabensammlung eine interne Internetplattform, die auch zur weiteren Diskussion und Bearbeitung zur Verfügung steht (und natürlich mit stärksten Mitteln vor öffentlichem Zugriff gesichert ist). Für die fünf Altersgruppen des Känguru (der Reihe nach Écolier, Benjamin, Kadett, Junior und Student für Schüler/innen von der 3. bis zur 12./13. Schulstufe) werden hunderte Aufgaben vorgeschlagen, und daraus die besten 24 bzw. 30 herauszufiltern ist gar nicht so leicht. Im Spätherbst jedes Jahres findet zu diesem Zweck ein Problemtreffen statt. Dieses Treffen, das gleichzeitig auch als Jahreshauptversammlung für den internationalen Trägerverein *Kangourou Sans Frontières* (mit Sitz in Paris) dient, findet in jedem Jahr in einem anderen Land statt. So hat etwa Österreich im Jahr 2007 in Graz die Rolle des Veranstalters übernommen, und nachdem 2010 das Treffen in Georgien stattgefunden hat, ist für 2011 Slowenien als Veranstalterland vorgesehen.

Die Aufgaben, die auf der Supportwebsite gesammelt werden sollen im Vorfeld von den Teilnehmern des Treffens bereits bearbeitet werden, was allerdings bei hunderten von Aufgaben nicht immer möglich ist. Bei der Ankunft am Veranstaltungsort bekommt jeder Delegierte eine gedruckte Version aller Aufgabenvorschläge nach Altersgruppen sortiert, und diese gedruckte Version steht auch für die weitere Diskussion allen als Grundlage zur Verfügung.

Zur Aufgabenauswahl finden sich die Teilnehmer in fünf Arbeitsgruppen zusammen, die jeweils die Auswahl der Aufgaben für eine konkrete Altersgruppe zum Ziel haben. Die Arbeitsgruppen der Sekundarstufe I (also Benjamin und Kadett) haben dabei die meisten Gruppenteilnehmer und auch die meist die größte Anzahl von Aufgabenvorschlägen zu behandeln. Die Aufgaben der Sekundarstufe II (Junior und Student) sind freilich zum Teil mathematisch anspruchsvoller, auch weil manche Aufgaben vorgeschlagen werden, die zwar sehr nett sind, aber gelegentlich viel zu schwer für einen Massenwettbewerb dieser Art. Dies allerdings zu entscheiden ist natürlich nur möglich, wenn man die Aufgaben auch durchgerechnet hat, was wiederum Zeit kostet.

Die Arbeitsweisen der fünf Gruppen sind nicht ganz einheitlich, auch weil die Vorgaben der Gruppen durchaus verschieden sind. (Man kann sich vorstellen, dass Aufgaben für die Volksschule meist von sehr anderer Art als jene für Oberstufenformen sind.) Einheitlich ist nur, dass die 3-Punkteaufgaben (also die ersten 8 bzw. 10 jeder Gruppe) für alle teilnehmenden Schüler/innen leicht zugänglich sein sollen, aber gleichzeitig auch "interessant" (was immer das auch bedeuten mag!). Diesen beiden Vorgaben gleichzeitig zu genügen ist erfahrungsgemäß das Schwierigste bei der Aufgabenauswahl. Es ist nicht so schwer, schöne schwere Aufgaben zu finden, wenn man in diesem Metier viel gearbeitet hat. Gar nicht einfach ist es allerdings, leichte und dennoch schöne Aufgaben zu finden. Dies gilt gleichmäßig für alle Altersgruppen.

Zusätzlich ist die Art der Gruppenarbeit natürlich auch abhängig von der Person, die die jeweilige Arbeitsgruppe leitet. Nach zwei bis drei Tagen stehen aber die Aufgaben in den fünf Gruppen fest, und die Koordination der Gruppen untereinander kann beginnen. Ein Punkt, in dem man sich international gar nicht einig ist, ist die Frage der gleichen Aufgaben in verschiedenen Altersgruppen. Während manche Länder den Standpunkt vertreten, dass die verschiedenen Gruppen gar keine gemeinsamen Aufgaben beinhalten sollten, ist es von anderen Ländern durchaus erwünscht, bewußt (geeignete) gleiche Aufgaben in mehreren, oder gar allen, Altersgruppen anzubieten, um einen Altersvergleich zu ermöglichen. Dieses Thema ist derzeit noch nicht ausdiskutiert. Da die Gruppen unabhängig voneinander arbeiten, werden derzeit immer gewisse, als besonders schön empfundene, Aufgaben mehrfach ausgewählt. Dies wird sich in Zukunft bei stärkerer Einbindung der Arbeitswebsite möglicherweise ändern.

Nach dem Treffen wird eine offizielle englischsprachige Version mit offiziellen Graphiken erstellt, und den Ländern auf der Arbeitswebsite zur Verfügung gestellt. Mit dieser Grundlage erstellen dann die Länder ihre eigenen nationalen Versionen. Das Erstellen der nationalen Versionen beinhaltet nicht nur die Übersetzung in die Landessprache. Zunächst gibt es eine Regel, wonach jedes Land bis zu 5 Aufgaben je Gruppe austauschen kann, um Anpassungen an nationale Schullehrpläne durchzuführen. (So muss z.B. für Österreich in fast jedem Jahr irgendeine ausgewählte Aufgabe der Gruppe Benjamin zum Thema Kreisberechnung gestrichen werden, da unser Lehrplan Kenntnis der Zahl π in der ersten Klasse AHS bzw. Hauptschule noch nicht vorsieht.) Manche Länder strukturieren auch auf andere Art die offiziellen Angaben um. Österreich verwendet etwa seit Jahren in der Kategorie Benjamin nur 24 der offiziellen 30 Aufgaben. Andere Länder gehen in dieser Beziehung noch viel weiter. Jedenfalls haben die verschiedenen nationalen Versionen zwar viele Aufgaben gemeinsam, wie man leicht auf den jeweiligen nationalen Websites nachsehen kann. Organisatorisch können die Aufgabensets der verschiedenen Länder aber sehr verschieden aussehen.

Wie bei der IMO gibt es eine Art inoffizielles Curriculum. Zu den konsensualen Inhalten, die von den Ländern allgemein akzeptiert werden, gehören etwa (jeweils der Altersstufe angepasst) Logik, Rechnen, Schulalgebra (Gleichungen, Ungleichungen, Folgen, komplexe Zahlen), Geometrie (Raumvorstellung, Euklidische Geometrie, geometrische Berechnung), Kegelschnitte, Kreis, Kugel, Kombinatorische Zählaufgaben, Funktionen (Exponential- und Logarithmusfunktion, trigonometrische Funktionen, Potenzfunktionen) und Teilbarkeitsaufgaben. Was auffallend im international konsensualen Bereich fehlt sind Aufgaben zur Stochastik (nur kombinatorische Wahrscheinlichkeit wird gelegentlich akzeptiert), die gesamte Analysis (also Differential- und Integralrechnung), Vektoren und Matrizen, und Algorithmen. Verschiedene Länder versuchen immer wieder Aufgaben zu diesen Bereichen vorzuschlagen, von der großen Mehrheit werden sie allerdings massiv abgelehnt. Auffallend ist auch, dass das Arbeiten mit elektronischen Hilfsmitteln (also Taschenrechner und PC) nach wie vor in diesem Bereich massiv abgelehnt wird.

4 Schnittstellen der mathematischen Wettbewerbe nach außen

Die mathematischen Wettbewerbe können und sollen nicht in einer eigenen kleinen Welt leben. Ihr Sinn besteht in der Förderung des Fachs, und dies soll auf vielfältige Art geschehen. Ob es in der geplanten Form auch gelingt ist freilich nicht unumstritten, aber alle jene, die Jahr für Jahr in der ganzen Welt für das gute Gelingen dieser Wettbewerbe Arbeit investieren sind klarerweise sehr wohl von ihrem Sinn überzeugt.

Es ist in diesem Zusammenhang sicher interessant, kurz über die Zusammenhänge zwischen den Wettbewerben und der "übrigen" Mathematik ein paar Gedanken zu verlieren.

- Schnittstelle Schule - Wettbewerbe

Zunächst stellt sich die Frage, was denn die Wettbewerbe dem Schulalltag bringen. Hauptziel des Kängurus ist die Popularisierung des Fachs. Es ist also zu hoffen, dass manche Schüler/innen, die sonst der Mathematik negativ gegenüber stehen, auch erkennen, dass dieses Fach Spaß machen kann. Die Aufgaben können Anregung zur fachlichen Diskussion bieten, da sie ohnehin nach dem Wettbewerb oft heftig diskutiert werden. Eine Nachbesprechung der Aufgaben und deren Lösungen kann auch häufig auf fruchtbaren, da vorbereiteten, Boden stoßen.

Außerdem zeigen gute Ergebnisse beim Känguru oft Talente auf, die aus verschiedenen Gründen im normalen Unterricht vielleicht nicht so aufgefallen wären. Dies ermöglicht eine gezielte weitere Förderung sonst möglicherweise unentdeckter Talente.

Der Hauptvorteil der Olympiade liegt in den Vorbereitungskursen. Diese ermöglichen begeisterten und begabten Schüler/innen eine vertiefte Auseinandersetzung mit dem Fach, wie sie sonst aufgrund der knapp zur Verfügung stehenden Stunden nur schwer möglich ist. Da auch der Durchschnitt der konsensualen Inhalte der Wettbewerbe mit den österreichischen Lehrplänen mit steigendem Alter immer geringer wird (was für die meisten Länder in viel geringerem Ausmaß gilt), bietet sich auch hier eine Möglichkeit zur Auseinandersetzung mit diesen klassischen Inhaltsbereichen, die sonst im österreichischen System nicht leicht Platz finden.

Schließlich darf in diesem Zusammenhang nicht vergessen werden zu erwähnen, dass die Unterstützung der Wettbewerbe durch die Schulbehörde in Österreich traditionell sehr gut ist. Viele Länder würden sich so etwas wie unsere (amtlich geförderten) Olympiadevorbereitungskurse in ihren Schulen wünschen, und bei uns ist dies dankenswerterweise eine Realität.

- Schnittstelle Tests - Wettbewerbe

Wie wir alle wissen, setzt sich die Kultur der zentralen Tests in Österreich in den letzten Jahren immer stärker durch. Hat es vor zwanzig Jahren kaum so etwas gegeben, sind heute Stichwörter wie Standards, PISA, TIMMS und zentrale Reifeprüfung nicht mehr aus der Schuldiskussion wegzudenken. Leider wird der Känguruwettbewerb immer wieder mit dem negativ besetzten Wort "Test" tituliert (im Französischen bezeichnet man ihn als "jeu-concours", also "Spielwettbewerb"), aber die oberflächlichen Ähnlichkeiten lassen diese Fehleinschätzung für den wenig informierten Beobachter nahe liegen. Der Känguru Wettbewerb war für viele in Österreich die erste Berührung mit dem Konzept von Multiple Choice, und die Kombination von Textverständnis mit mathematischen Inhalten spielt beim Känguru dieselbe Rolle wie bei vielen Aufgaben aus den Standards oder PISA.

Ein weiterer Berührungspunkt zwischen den internationalen Vergleichstests und dem Känguru besteht in der Suche nach Themen. Inhalte, die für viele Länder gleichzeitig in den

Lehrplänen zu finden sind, sind vor allem in höheren Jahrgängen schwer zu finden, und diese Schwierigkeit macht natürlich auch jede Vergleichbarkeit problematisch. Dies gilt ebenso für Tests wie PISA wie auch für ein Spiel wie dem Känguru.

- Schnittstelle Universität - Wettbewerbe

Während die Schnittstelle zu den Tests eher beim Känguru zu finden ist, findet sich die Nähe zur Universität naturgemäß eher bei der IMO. IMO Aufgaben werden, wie bereits erwähnt, in vielen Ländern nur durch ihre Forschungsnähe gerechtfertigt. Viele IMO Aufgaben sind Sonderfälle aus aktueller Forschung. Die besten IMO-Teilnehmer werden von Universitäten umworben und Stipendien für die besten Universitäten winken erfolgreichen Teilnehmer/innen bei der IMO.

In Österreich unterstützt die ÖMG durch eine Arbeitsgruppe die Mathematikolympiade, und einige Universitäten, wie etwa die TU Graz oder die TU Wien, unterstützen die Olympiade durch Hilfe bei der Durchführung von Wettbewerben oder eigener Kurse, sowohl für Schüler/innen als auch für Lehrer/innen, die Kurse führen möchten.

Schließlich sind die Teilnehmer/innen nationaler und internationaler Olympiaden in vielen Ländern Ziele fachdidaktischer Forschung zur Hochbegabtenförderung. In Österreich ist dieser Bereich noch nicht sehr stark vertreten, aber zu diesen Fragen hat sich vor kurzem eine international stark besetzte Forschungsgruppe gebildet. Weitere Information dazu findet man etwa bei <http://www.igmcg.org/history.html>.

5 Informationen über die Wettbewerbe

Wer sich näher für die mathematischen Wettbewerbe, ob in Österreich oder international, interessiert, kann sich auf vielfältige Art informieren. Vor allem ist jede/r Lehrer/in herzlich zur Mitarbeit auf vielen Ebenen eingeladen!

Wer sich dafür interessiert, einmal selbst einen Mathematikolympiadekurs an einer AHS zu halten, kann sich z.B. durch Teilnahme am alljährlichen Seminar für Kursleiter in Mariazell informieren. (Die nächsten finden von 9.11. bis 11.11. 2011 und von 5.11. bis 7.11. 2012 statt.) Allgemeine Information über die österreichische Mathematikolympiade findet man unter www.oemo.at, und Informationen über alle bisher durchgeführten internationalen Mathematikolympiaden gibt es unter www.imo-official.org.

Wer mit einzelnen Schülern, ganzen Klassen oder auch ganzen Schulen am Känguru der Mathematik teilnehmen möchte, ist auch dazu herzlich eingeladen. Anmeldung und Information für Österreich gibt es unter www.kaenguru.at, und Information über die internationale Trägerorganisation *Kangourou Sans Frontières* gibt es unter www.math-ksf.org.

Schließlich kann man weitere Links auf meiner Website unter <http://geretschlaeger.brgkepler.at> finden, oder mich unter robert.geretschlaeger@brgkepler.at kontaktieren.