Arbeitsblätter zum Thema

“Papierfalten und Algebra”

Lösungen

Robert Geretschläger

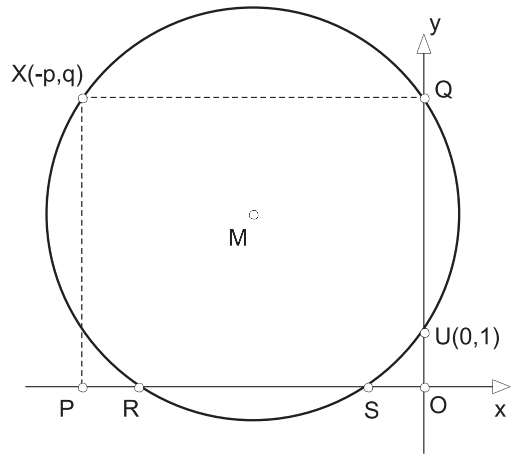
Graz, Österreich

2009

Papierfalten und Algebra

Blatt 1 Lösung

Lösen quadratischer Gleichungen mit Zirkel und Lineal



AUFGABE 1

Zeige, dass die x-Koordinaten der Schnittpunkte R und S des abgebildeten Kreises mit der x-Achse genau die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ sind.

Wie vorausgesetzt, haben U und X die Koordinaten $U(0,1)$ bzw. $X(-p,q)$. M ist der Mittelpunkt der Strecke XU und somit des Kreises, und R und S sind die Schnittpunkte des Kreises mit der x-Achse.

Da P und Q auf der x-Achse liegen, sind ihre y-Koordinaten gleich 0. Um ihre x-Koordinaten zu berechnen, stellen wir zunächst einmal fest, dass M gleich weit entfernt ist von R, S und U. Da M der Mittelpunkt von XU ist, hat er die Koordinaten

$$M\left(-\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2}\right).$$

Nehmen wir nun an, dass die x-Koordinaten von R und S durch die Variable x_o dargestellt sind, folgt aus

$$|MR| = |MS| = |MU|$$

sofort

$$\sqrt{\left(x_o + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q+1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-q}{2}\right)^2}$$

oder

$$x_o^2 + px_o + \frac{p^2}{4} + \frac{q^2+2q+1}{4} = \frac{p^2}{4} + \frac{1-2q+q^2}{4},$$

d.h.

$$x_o^2 + px_o + q = 0.$$

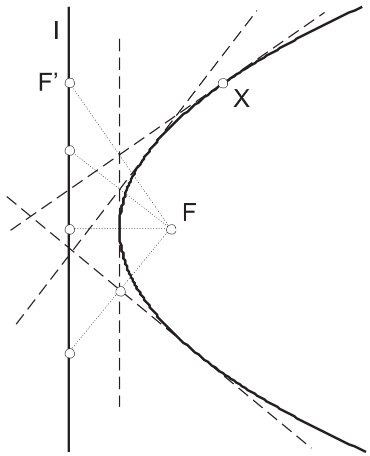
Wir sehen also, dass die x-Koordinaten von R und S genau die Lösungen der gegebenen Gleichung sind. Der Kreis mit Durchmesser XU schneidet die x-Achse genau dann, wenn die Gleichung reelle Lösungen besitzt.

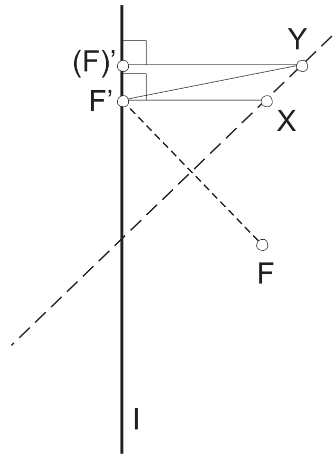
Robert Geretschläger, 2009

Papierfalten und Algebra

Blatt 2 Lösung

Falten von Parabeltangenten





AUFGABE 2

Zeige, dass jede Faltkante, die durch das Falten von F auf einen Punkt von l entsteht, eine Tangente der Parabel mit Brennpunkt F und Leitlinie l ist.

Zunächst kann festgestellt werden, dass die Faltkante im rechten Winkel zur Verbindungsstrecke von F und F' steht, und diese halbiert. Die Faltkante ist also die Streckensymmetrale der Strecke FF', und besteht somit aus allen Punkten, die von F und F' gleich weit entfernt sind.

Der Punkt X, der auf der Faltkante und der Normalen zu l durch F' liegt, ist nach der Definition des Abstands eines Punkts von einer Geraden von l gleich weit entfernt wie von F'. Dieser Punkt hat somit, da er als Punkt der Streckensymmetrale von FF' denselben Abstand von F und F' hat, auch denselben Abstand von F und l, und ist somit ein Punkt der Parabel.

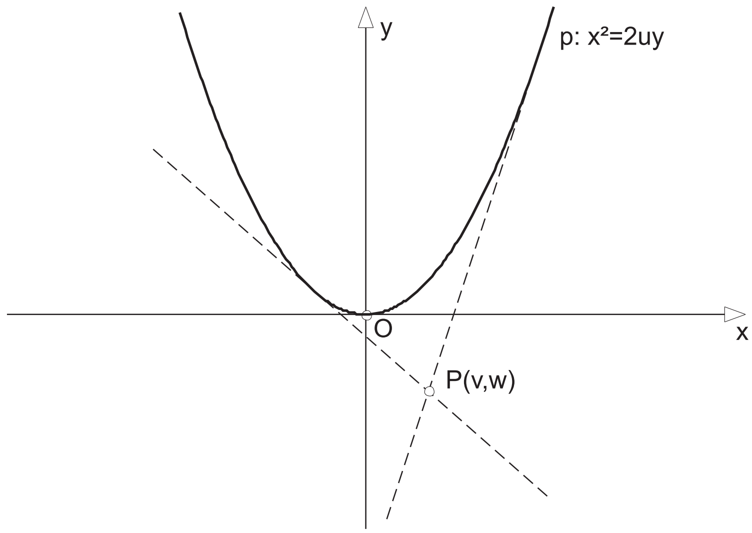
Nun müssen wir noch zeigen, dass es auf der Faltkante keinen weiteren Punkt der Parabel gibt. Nehmen wir an, es gäbe einen zweiten solchen Punkt Y. Als Punkt der Streckensymmetrale von FF' ist dieser Punkt von F und F' gleich weit entfernt. Nun wird aber der Abstand von Y zu l auf der Normalen zu l gemessen. Dieser ist also gleich dem Abstand von Y zum Lotfußpunkt $(F)'$. Da das Dreieck $\triangle YF'(F)'$ rechtwinkelig ist, ist die Hypotenuse YF' sicher länger als die Kathete $Y(F)'$. Der Abstand von Y zu l ist somit sicher kleiner als der Abstand von Y zu F, und Y ist daher sicher kein Punkt der Parabel.

Dieses Argument gilt für alle Punkte der Faltkante, die auf derselben Seite von l wie F und X liegen. Da sicher kein Punkt auf der anderen Seite von l denselben Abstand von F und l haben kann, gibt es auf l genau einen Punkt der Parabel, und da die Faltkante sicher nicht normal zu l liegt ist die Faltkante, wie behauptet, eine Tangente der Parabel.

Papierfalten und Algebra

Blatt 3 Lösung

Lösen quadratischer Gleichungen mit Faltmethoden



AUFGABE 3.1

Zeige, dass die Steigungen der Tangenten der Parabel p durch den Punkt P die Lösungen einer quadratischen Gleichung mit von u, v und w abhängigen Koeffizienten sind und bestimme diese Gleichung.

Die Gerade mit der Steigung s, die durch den Punkt $P(v, w)$ geht, hat die Gleichung

$$y = s(x - v) + w.$$

Wenn eine solche Gerade Tangente der Parabel p sein soll, muss die Diskriminante der Gleichung

$$\begin{aligned} & x^2 = 2u(s(x - v) + w) \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 2usx + 2uvs - 2uw = 0 \end{aligned}$$

gleich 0 sein. Daher gilt

$$\begin{aligned} & u^2s^2 - 2uvs + 2uw = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & s^2 - \frac{2v}{u} \cdot s + \frac{2w}{u} = 0, \end{aligned}$$

und wir sehen, dass die Steigungen der Tangenten von p durch P die Lösungen der Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

mit

$$p = -\frac{2v}{u} \quad \text{and} \quad q = \frac{2w}{u}$$

sind.

AUFGABE 3.2

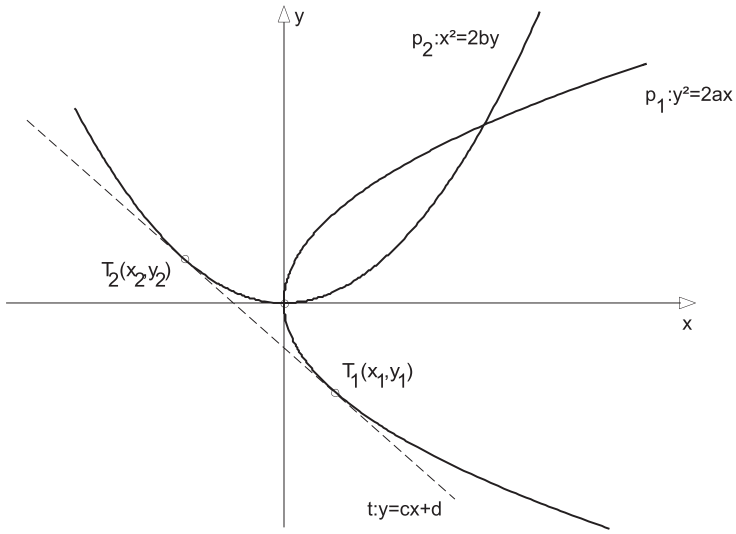
Wie müssen die Werte von u, v und w in der Angabe zu Aufgabe 3.1.gewählt werden, damit die Steigungen der Parabeltangenten durch P Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ bei vorgegebenen Werten p und q sind? Wo liegt der Brennpunkt und wo die Leitlinie der Parabel? (d.h.: Welchen Punkt muss man auf Punkte welcher Geraden falten, sodass die entstehenden Faltkanten durch den Punkt P gehen und ihre Steigungen die gegebene quadratische Gleichung lösen?)

Wollen wir eine vorgegebene Gleichung $x^2 + px + q = 0$ lösen, können wir $u = 2$, $v = -p$ und $w = q$ wählen, und erhalten somit die Lösungen als Steigungen der Tangenten der Parabel $p : x^2 = 4y$ durch den Punkt $P(-p, q)$.

Papierfalten und Algebra

Blatt 4 Lösung

Gemeinsame Tangenten zweier Parabeln: Eine kubische Aufgabe



AUFGABE 4

Bestimme die Steigung der gemeinsamen Tangente der beiden Parabeln p_1 und p_2 in Abhängigkeit von a und b.

Wir nehmen an, dass die Gleichung der gesuchten gemeinsamen Tangente $t : y = cx + d$ ist. Ferner nehmen wir an, dass $T_1(x_1, y_1)$ der Berührpunkt von t mit p_1 ist. Die Gleichung von t kann dann auch geschrieben werden als

$$yy_1 = ax + ax_1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{a}{y_1} \cdot x + \frac{ax_1}{y_1}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} & c = \frac{a}{y_1} \quad \text{und} \quad d = \frac{ax_1}{y_1} = cx_1 \\ \Rightarrow \quad & y_1 = \frac{a}{c} \quad \text{und} \quad x_1 = \frac{d}{c} \\ \Rightarrow \quad & \frac{a^2}{c^2} = 2a \cdot \frac{d}{c} \\ \Rightarrow \quad & a = 2cd. \end{aligned}$$

Ferner nehmen wir an, dass $T_2(x_2, y_2)$ der Berührpunkt von t mit p_2 ist. Die Gleichung von t kann dann auch geschrieben werden als

$$xx_2 = by + by_2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x_2}{b} \cdot x - y_2.$$

Somit gilt auch

$$\begin{aligned}
& c = \frac{x_2}{b} \quad \text{und} \quad d = -y_2 \\
\Rightarrow \quad & x_2 = bc \quad \text{und} \quad y_2 = -d \\
\Rightarrow \quad & b^2c^2 = -2bd \\
\Rightarrow \quad & d = -\frac{bc^2}{2},
\end{aligned}$$

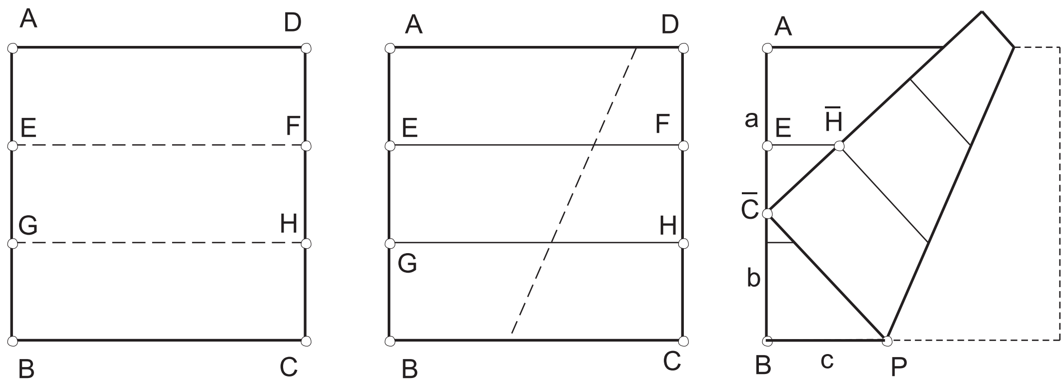
und wir erhalten

$$\begin{aligned}
& a = 2cd \quad \text{und} \quad d = -\frac{bc^2}{2} \\
\Rightarrow \quad & a = -bc^3 \\
\Rightarrow \quad & c = -\sqrt[3]{\frac{a}{b}}.
\end{aligned}$$

Papierfalten und Algebra

Blatt 5 Lösung

Das Delische Problem



AUFGABE 5

Zeige, dass $a : b = \sqrt[3]{2} : 1$ *gilt.*

Aufgrund der Angabe gilt

$$AE = EG = GB = DF = FH = HC.$$

Verwenden wir die Punktbezeichnungen aus der Figur, gilt nun

$$P\overline{C} = PC,$$

und

$$P\overline{C} = (a + b) - c,$$

und da $\triangle BP\overline{C}$ rechtwinkelig ist, folgt

$$b^2 + c^2 = (a + b - c)^2$$

oder

$$0 = a^2 + 2ab - 2c(a + b),$$

und somit haben wir

$$c = \frac{a^2 + 2ab}{2(a + b)}.$$

Die Dreiecke $\triangle BP\overline{C}$ und $\triangle E\overline{CH}$ sind ähnlich, da

$$\angle\overline{C}BP = \angle\overline{H}E\overline{C} = 90^o$$

und

$$\begin{aligned}\angle\overline{C}PB &= 180^o - \angle\overline{C}BP - \angle B\overline{C}P\\ &= 90^o - \angle B\overline{C}P\\ &= 90^o - (180^o - \angle E\overline{CH} - \angle\overline{HC}P)\\ &= \angle E\overline{CH}\end{aligned}$$

gilt. In $\triangle E\overline{CH}$ haben wir

$$\overline{CH} = \frac{a+b}{3}$$

und

$$E\overline{C} = a - \frac{a+b}{3} = \frac{2a-b}{3},$$

und wegen

$$\frac{\overline{CH}}{E\overline{C}} = \frac{P\overline{C}}{BP}$$

folgt

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{a+b}{3}}{\frac{2a-b}{3}} = \frac{a+b-\frac{a^2+2ab}{2(a+b)}}{\frac{a^2+2ab}{2(a+b)}}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{a+b}{2a-b} = \frac{a^2+2ab+2b^2}{a^2+2ab}\\ \Leftrightarrow\ &a^3+2a^2b+a^2b+2ab^2 = 2a^3-4a^2b+4ab^2-a^2b-2ab^2-2b^3\\ \Leftrightarrow\ &a^3 = 2b^3.\end{aligned}$$

Ziehen wir daraus die dritte Wurzel, erhalten wir

$$a = \sqrt[3]{2}\cdot b,$$

und die Behauptung ist gezeigt.

Papierfalten und Algebra

Blatt 6 Lösung

Dritte Wurzeln falten

AUFGABE 6.1

Gib eine Möglichkeit für Punkte und Geraden an, die so gewählt wurden, dass das gleichzeitige Falten der beiden Punkte auf die jeweils zugehörige Gerade eine Faltkante mit der Steigung $-\sqrt[3]{2}$ ergibt.

AUFGABE 6.2

Gib eine Möglichkeit für Punkte und Geraden an, die bei vorgegebener natürlicher Zahl $n > 2$ so gewählt wurden, dass das gleichzeitige Falten der beiden Punkte auf die jeweils zugehörige Gerade eine Faltkante mit der Steigung $-\sqrt[3]{n}$ ergibt.

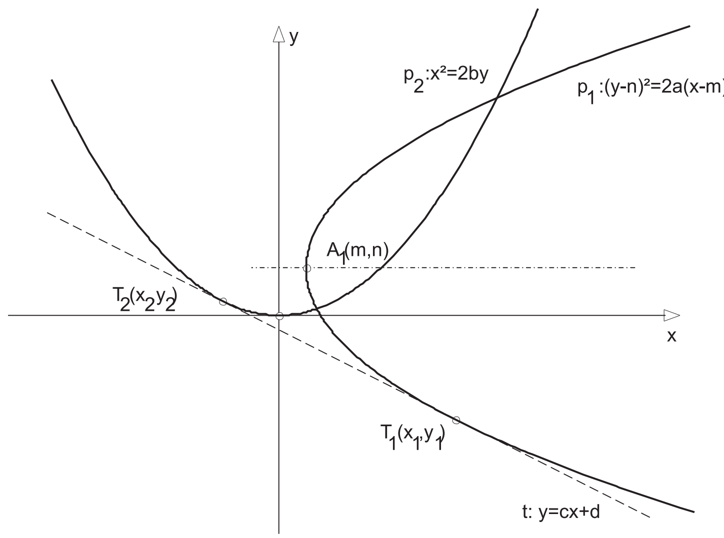
Aus der Lösung zu Aufgabe 4 wissen wir, dass die gemeinsame Tangente der Parabeln mit den Gleichungen $p_1 : y^2 = 2ax$ und $p_2 : x^2 = 2by$ die Steigung $-\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ hat. Wollen wir also, dass die Steigung $-\sqrt[3]{n}$ sein soll, können wir z.B. $a = n$ und $b = 1$ oder auch $a = 2n$ und $b = 2$ wählen. Letzteres ist vielleicht etwas einfacher zu handhaben, da wir ja wissen, dass etwa der Brennpunkt einer Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$ die Koordinaten $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ hat. Für $a = 2n$ und $b = 2$ hat also die Parabel p_1 den Brennpunkt $(n, 0)$ und die Leitlinie mit der Gleichung $x = -n$ und die Parabel p_2 den Brennpunkt $(0, 1)$ und die Leitlinie mit der Gleichung $y = -1$. (Im Sonderfall $n = 2$ haben wir natürlich den Brennpunkt $(2, 0)$ und die Leitlinie mit der Gleichung $x = -2$.)

Falten wir also jeweils die Brennpunkte gleichzeitig auf die zugehörigen Leitlinien, bekommen wir die gemeinsame Tangente der beiden Parabeln als Faltkante, und diese hat die gewünschte Steigung.

Papierfalten und Algebra

Blatt 7 Lösung

Lösen kubischer Gleichungen durch Falten



AUFGABE 7.1

Bestimme eine Gleichung, deren Koeffizienten von den Werten a, b, m und n abhängen, deren Lösungen die Steigungen der gemeinsamen Tangenten von p_1 und p_2 sind.

AUFGABE 7.2

Bestimme die Koordinaten von Punkten P_1 und P_2 und die Gleichungen von Geraden l_1 und l_2 so, dass die Steigungen der Faltkanten, die sich bei gleichzeitigem Falten von P_1 auf l_1 und P_2 auf l_2 ergeben, die Gleichung $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ lösen.

Wie in der Lösung von Aufgabe 4 nehmen wir an, dass die Gleichung einer gemeinsamen Tangente von p_1 und p_2 (die in diesem Fall nicht notwendigerweise eindeutig ist), durch die Gleichung

$$t : y = cx + d$$

gegeben ist. Wieder kann eine derartige Tangente zu keiner Koordinatenachse parallel sein. Wir nehmen wieder an, dass $T_1(x_1, y_1)$ der Berührpunkt von t mit p_1 ist. t hat dann auch die Gleichung

$$\begin{aligned} & (y-n)(y_1-n) = a(x-m) + a(x_1-m) \\ \Leftrightarrow \quad & y = \frac{a}{y_1-n} \cdot x + n + \frac{ax_1 - 2am}{y_1-n}. \end{aligned}$$

Es folgt somit

$$\begin{aligned} & c = \frac{a}{y_1-n} \quad \text{und} \quad d = n + \frac{ax_1 - 2am}{y_1-n} \\ \Rightarrow \quad & y_1 = \frac{a+nc}{c} \quad \text{and} \quad x_1 = \frac{d-n}{c} + 2m, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & (y_1-n)^2 = 2a(x_1-m) \\ \Rightarrow\quad & \frac{a^2}{c^2} = 2a\left(\frac{d-n}{c}+m\right) \\ \Rightarrow\quad & a = 2c(d-n+cm). \end{aligned}$$

Nehmen wir wieder an, dass $T_2(x_2, y_2)$ der Berührpunkt von t mit p_2 ist, hat t auch die Gleichung

$$y = \frac{x_2}{b}\cdot x - y_2,$$

woraus

$$d = -\frac{bc^2}{2}$$

folgt. Setzen wir für d ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} & a = 2c\left(-\frac{bc^2}{2}-n+cm\right) \\ \Leftrightarrow\quad & bc^3-2mc^2+2nc+a=0 \\ \Leftrightarrow\quad & c^3-\frac{2m}{b}\cdot c^2+\frac{2n}{b}\cdot c+\frac{a}{b}=0. \end{aligned}$$

Die Steigung der gemeinsamen Tangente ist also eine Lösung der Gleichung

$$c^3-\frac{2m}{b}\cdot c^2+\frac{2n}{b}\cdot c+\frac{a}{b}=0.$$

Wir stellen fest, dass diese Gleichung eine reelle Lösung und ein Paar konjugiert komplexer Lösungen haben kann, oder aber drei reelle (von denen eventuell zwei oder alle drei gleich sein können). Diese Fälle entsprechen den Umständen, dass sich die Parabeln schneiden, oder eben nicht.

Für eine gegebene kubische Gleichung kann man daher auf folgende Art die Lösungen bestimmen.

Nehmen wir an, die gegebene Gleichung wäre

$$x^3+px^2+qx+r=0.$$

Nehmen wir als Parameter b von p_2 die Einheit 1, gilt

$$p=-2m,\ q=2n \quad \text{und} \quad r=a$$

oder

$$m=-\frac{p}{2},\ n=\frac{q}{2} \quad \text{und} \quad a=r.$$

Wir müssen also nur den Punkt mit den Koordinaten

$$F_1\left(-\frac{p}{2}+\frac{r}{2}, \frac{q}{2}\right)$$

und die Gerade ℓ_1 mit der Gleichung

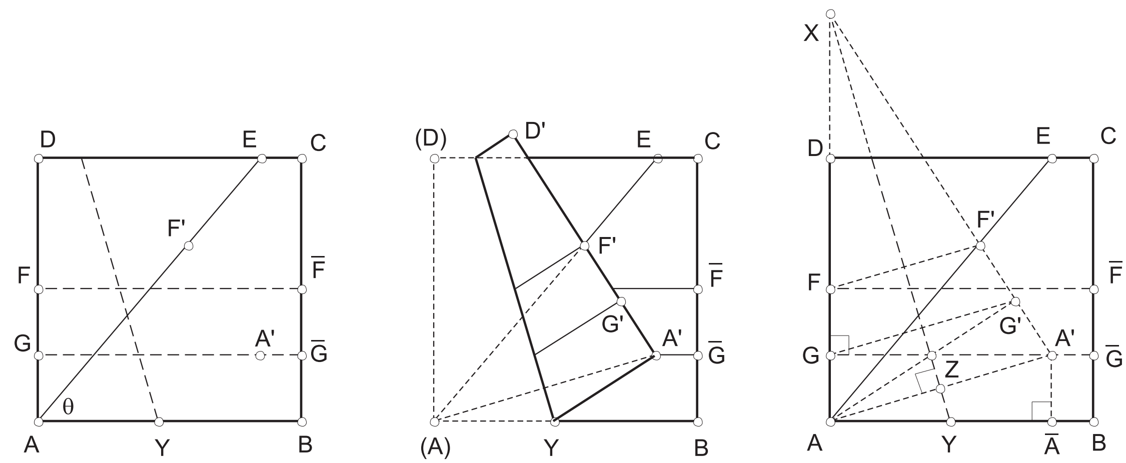
$$x=-\frac{p}{2}-\frac{r}{2}$$

bestimmen. Diese sind dann Brennpunkt und Leitlinie der Parabel p_1. Der Brennpunkt F_2 von p_2 ist $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, und ihre Leitlinie ℓ_2 ist durch die Gleichung $y=-\frac{1}{2}$ gegeben. Falten wir F_1 auf ℓ_1 und gleichzeitig F_2 auf ℓ_2, erhalten wir eine gemeinsame Tangente von p_1 and p_2, deren Steigung die gegebene Gleichung löst.

Papierfalten und Algebra

Blatt 8 Lösung

Winkeldreiteilung nach Abe



AUFGABE 8

Beweise, dass $\angle A'AB = \frac{\theta}{3}$ gilt.

Zunächst stellen wir fest, dass die Faltkante XY sicher zu keiner Seite des Ausgangsquadrats parallel liegt. (X und Y sind wie in der Abbildung rechts ersichtlich definiert.)

Ist Z der Schnittpunkt der Faltkante mit $G\overline{G}$, sehen wir, dass Z der Höhenschnittpunkt der Dreiecks $\triangle AA'X$ ist, da die Gerade $A'G = G\overline{G}$ normal zu AX ist, und AA' normal zur Faltkante XY. Da GA' beim Falten in $G'A$ übergeht (und XA in XA'), ist AG' die dritte Höhe in $\triangle AA'X$, und geht somit durch Z.

Bezeichnen wir den Winkel $\angle AXY = \angle A'XY = \alpha$, erkennen wir, dass AG' normal zu $A'X$ ist und AB zu AX. Es folgt somit $\angle G'AB = \angle A'XA = 2\alpha$.

Bezeichnen wir den Lotfußpunkt von A' auf AB mit $\overline{A}$, sehen wir, dass die Dreiecke $\triangle AA'\overline{A}$ und $\triangle AA'G'$ kongruent sind, da beide rechtwinkelig sind, AA' als gemeinsame Hypotenuse haben, und sowohl $A'\overline{A}$ als auch $A'G'$ gleich lang wie GA sind. Es folgt somit

$$\angle G'AA' = \angle A'A\overline{A} = \alpha.$$

Auf ähnliche Art sieht man, dass auch die Dreiecke $\triangle AA'G'$ und $\triangle AF'G'$ kongruent sind. Beide sind rechtwinkelig mit der gemeinsamen Kathete AG', und es gilt

$$F'G' = FG = GA = G'A'.$$

Es folgt somit auch

$$\angle F'AG' = \angle G'AA' = \angle A'A\overline{A} = \alpha,$$

und die Geraden AG' und AA' dritteln somit wie behauptet den Winkel $\angle EAB$.

Robert Geretschläger, 2009

Papierfalten und Algebra

Blatt 9 Lösung

Winkeldreiteilung durch Lösung einer kubischen Cosinusgleichung

AUFGABE 9

Bestimme eine Formel für $\cos 3x$ und leite daraus eine Methode zum Dritteln eines Winkels mit Papierfaltmethoden ab.

Eine Möglichkeit diese Aufgabe zu lösen ist die folgende.
Es gilt

$$\begin{aligned}
\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) \\
&= \cos\alpha \cos 2\alpha - \sin\alpha \sin 2\alpha \\
&= \cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) - 2\sin^2\alpha\cos\alpha \\
&= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha \\
&= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Kennen wir also bereits eine Strecke der Länge $\cos 3\alpha$, können wir $\cos\alpha$ bestimmen, indem wir die Gleichung

$$x^3 - \frac{3}{4}\cdot x - \frac{1}{4}\cdot \cos 3\alpha = 0$$

lösen. Wie wir bereits aus Aufgabe 7 wissen, können wir dies mit Hilfe der Parabeln p_1 mit Brennpunkt

$$F_1\left(-\frac{1}{8}\cos 3\alpha, -\frac{3}{8}\right)$$

und Leitlinie

$$\ell_1 : x = \frac{1}{8}\cos 3\alpha$$

(da a negativ ist, ist die Parabel in diesem Fall nach links offen), und p_2 mit Brennpunkt $F_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$ und Leitlinie $\ell_2 : y = -\frac{1}{2}$ bewerkstelligen. Die Steigung einer gemeinsamen Tangente dieser Parabeln liefert uns den Wert von $\cos\alpha$, und somit den Winkel α selbst.