# Arbeitsblätter zum Thema “Papierfalten und Algebra” für den Unterricht Hochbegabter in der Sekundarstufe II

Robert Geretschläger

Graz, Österreich, 2009

# Papierfalten und Algebra

## Blatt 1 Name:________________

### Lösen quadratischer Gleichungen mit Zirkel und Lineal

Das Lösen quadratischer Gleichungen mit algebraischen Mitteln ist ein besonders wichtiges Thema der elementaren Algebra. Es ist bekannt, dass man die Lösungen einer quadratischen Gleichung der Form

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \text{mit} \quad p, q \in \mathbf{R}$$

wegen

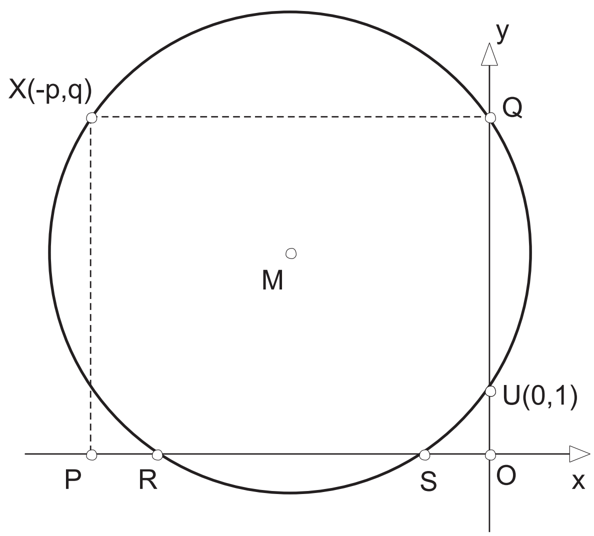
$$x^2 + px + q = 0 \iff x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

mit der Formel

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

bestimmen kann.

Dies gelingt aber auch mit graphischen Methoden mit Zirkel und Lineal. Betrachten wir folgende Figur:




Der Punkt $U$ ist der Einheitspunkt auf der $y$-Achse und hat die Koordinaten $U(0,1)$. Der Punkt $X$ hat die Koordinaten $X(-p,q)$. Die Strecke $XU$ ist ein Durchmesser des Kreises.

## AUFGABE 1

*Zeige, dass die $x$-Koordinaten der Schnittpunkte $R$ und $S$ des abgebildeten Kreises mit der $x$-Achse genau die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ sind.*

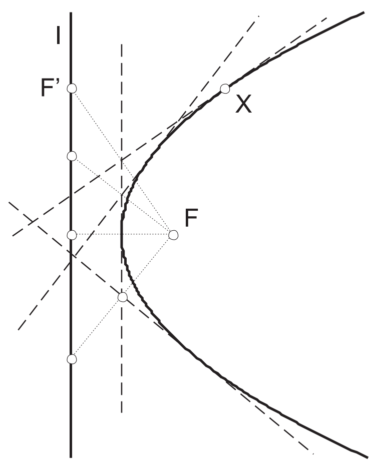
# Papierfalten und Algebra

## Blatt 2 Name:

### Falten von Parabeltangenten

Untersuchen wir die Geometrie, die dem Papierfalten zugrunde liegt, spielen Parabeln eine grundlegende Rolle. Wir erinnern uns, dass eine Parabel als Menge aller Punkte definiert ist, die von einem Punkt (genannt “Brennpunkt”) denselben Abstand wie von einer Geraden (genannt “Leitlinie”) haben. Alle Geraden, die mit der Parabel genau einen Punkt gemeinsam haben (und nicht normal zur Leitlinie stehen) bezeichnen wir als “Tangenten” der Parabel.

Nun betrachten wir folgende Figur:




Wir nehmen an, dass $F$ ein bekannter Punkt auf einem Blatt Papier und $l$ eine bekannte Gerade auf dem Papier sind. (Eigentlich ist $l$ in Wirklichkeit nur eine Strecke, da ja jedes echte Stück Papier begrenzt ist. Für theoretische Zwecke können wir aber von einem unendlichen Blatt Papier ausgehen.) Faltet man das Papier so, dass der Punkt $F$ auf einem Punkt von $l$ zu liegen kommt, entsteht jeweils eine der strichliert gezeichneten Linien als Faltkante.

## AUFGABE 2

*Zeige, dass jede Faltkante, die durch das Falten von $F$ auf einen Punkt von $l$ entsteht, eine Tangente der Parabel mit Brennpunkt $F$ und Leitlinie $l$ ist.*

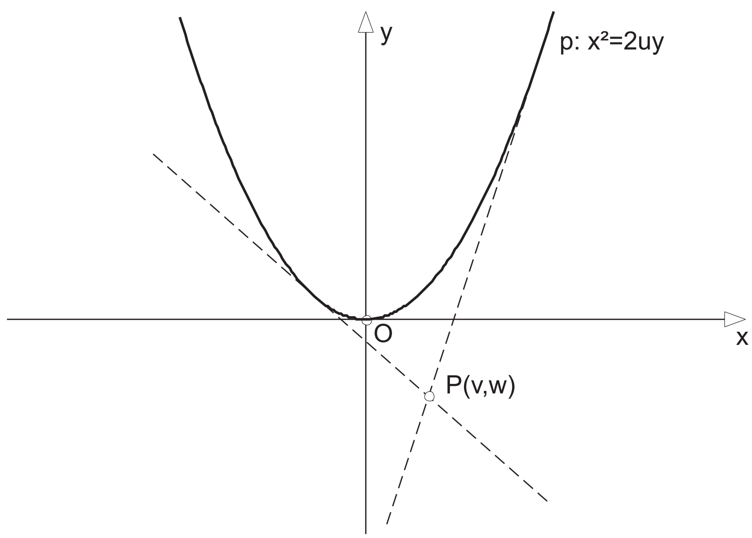
# Papierfalten und Algebra

## Blatt 3 Name:

### Lösen quadratischer Gleichungen mit Faltmethoden

Führt man geometrische Konstruktionen nach klassischen Euklidischen Methoden aus, so zeichnet man am Blatt der Reihe nach Strecken und Kreise. Punkte werden als deren Schnittobjekte erzeugt, und mit deren Hilfe entstehen weitere Strecken und Kreise.

Führt man geometrische Konstruktionen mit den Methoden des Papierfaltens durch, erzeugt man immer nur Strecken (die als Geraden auf einem unendlich großen Blatt Papier gedacht werden können) und deren Schnittpunkte. Wie in Aufgabe 2 erkannt, sind alle Faltkanten, die man beim Falten eines Punktes auf die Punkte einer Gerade erhält (sofern der Punkt nicht selbst auf der Geraden liegt), Tangenten einer Parabel. Es ist also nicht zu viel zu behaupten, dass Parabeln im Rahmen der Papierfaltkonstruktionen eine vergleichbar grundlegende Rolle wie Kreise bei Euklidischen Konstruktionen spielen. Wir dürfen also annehmen, dass es eine sehr einfache Methode geben müsste, um (ähnlich wie in der Euklidischen Konstruktion in Aufgabe 1) mit Hilfe einer Parabel quadratische Gleichungen mit Papierfaltmethoden zu lösen. Um eine derartige Methode abzuleiten, betrachten wir folgende Figur:




Die Gleichung der Parabel ist gegeben durch $p : x^2 = 2uy$ (mit dem Parameter $u$) und weiters ist auch der Punkt $P(v, w)$ gegeben.

## AUFGABE 3.1

*Zeige, dass die Steigungen der Tangenten der Parabel $p$ durch den Punkt $P$ die Lösungen einer quadratischen Gleichung sind, deren Koeffizienten von $u$, $v$ und $w$ abhängig sind, und bestimme diese Gleichung.*

Unser Ziel an dieser Stelle ist es, eine Methode zur Lösung einer quadratischen Gleichung mit einfachen Papierfaltmethoden abzuleiten. Wie wir schon aus Aufgabe 2 wissen, können wir problemlos die Tangenten einer Parabel mit gegebenem Brennpunkt und gegebener Leitlinie falten. Es ist auch kein Problem, die Faltkanten so zu bestimmen, dass sie durch einen vorgegebenen Punkt gehen, und somit die Tangenten der Parabel durch einen bestimmten Punkt sind. Es stellt sich daher beinahe von selbst folgende Frage:

# AUFGABE 3.2

*Wie müssen die Werte von $u$, $v$ und $w$ in der Angabe zu Aufgabe 3.1.gewählt werden, damit die Steigungen der Parabeltangenten durch $P$ Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ bei vorgegebenen Werten p und q sind? Wo liegt der Brennpunkt und wo die Leitlinie der Parabel? (D.h.: Welchen Punkt muss man auf Punkte welcher Geraden falten, sodass die entstehenden Faltkanten durch den Punkt $P$ gehen und ihre Steigungen die gegebene quadratische Gleichung lösen?)*

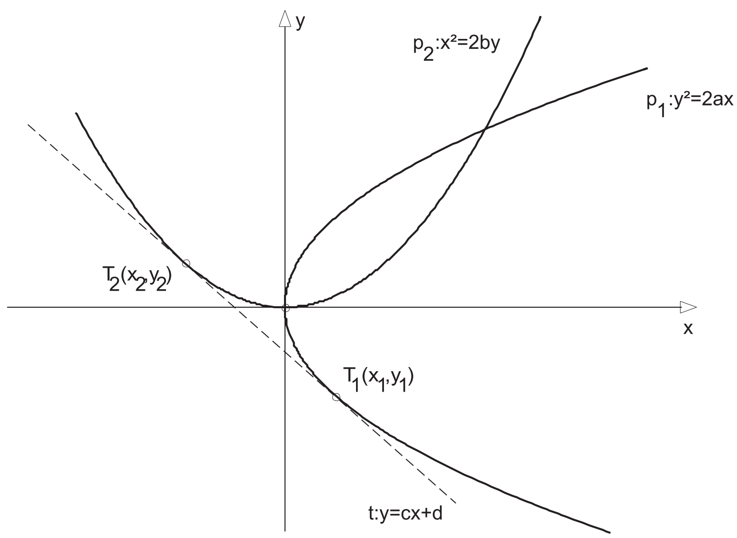
# Papierfalten und Algebra

## Blatt 4 Name:

### Gemeinsame Tangenten zweier Parabeln: Eine kubische Aufgabe

Wie man sich leicht überlegen kann, ist es nicht nur möglich, einen Punkt auf einen beliebigen Punkt einer vorgegebenen Gerade zu falten, sondern man kann auch problemlos gleichzeitig einen Punkt $F_1$ auf eine Gerade $l_1$ und einen Punkt $F_2$ auf eine Gerade $l_2$ falten. Da das Falten eines Punktes auf einen Punkt einer Geraden eine Tangenten der Parabel mit Brennpunkt im vorgegebenen Punkt und Leitlinie in der vorgegebenen Gerade erzeugt, erhalten wir beim gleichzeitigen Hinüberfalten zweier Punkte auf zwei Gerade als Faltkante eine gemeinsame Tangente zweier derart definierter Parabeln.

Nun stellt sich die Frage, was es algebraisch bedeutet, gemeinsame Tangenten zweier gegebener Parabeln zu bestimmen. Wir betrachten zu diesem Thema in folgender Figur einen besonderen Fall:




Gegeben sind zwei Parabeln, und zwar eine Parabel $p_1$ mit der Gleichung $p_1 : y^2 = 2ax$ und eine Parabel $p_2$ mit der Gleichung $p_2 : x^2 = 2by$, wobei $a$ und $b$ jeweils beliebige positive reelle Zahlen sind. Es stellt sich nun heraus, dass die gemeinsame Tangente dieser beiden Parabeln bereits eine kubische Aufgabe löst.

## AUFGABE 4

*Bestimme die Steigung der gemeinsamen Tangente der beiden Parabeln $p_1$ und $p_2$ in Abhängigkeit von $a$ und $b$.*

Robert Geretschläger, 2009

# Papierfalten und Algebra

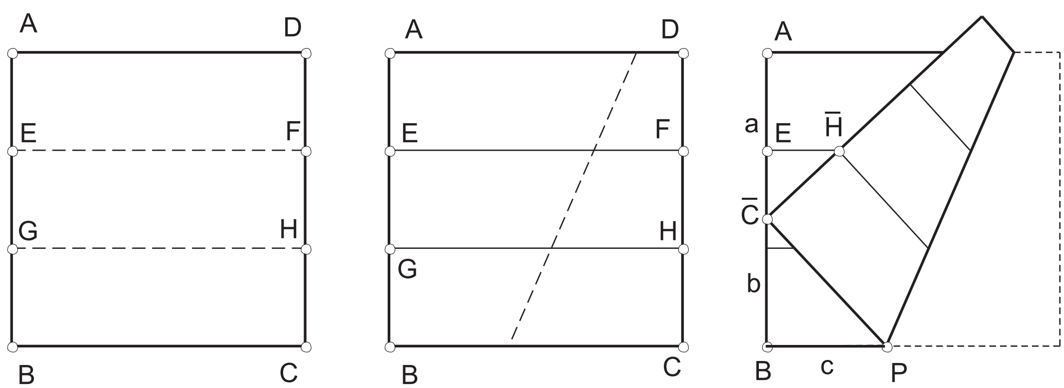
## Blatt 5 Name:____________________

### Das Delische Problem

Eine klassische "unlösbare" Aufgabe ist die Frage der Würfelverdoppelung. Diese Aufgabe geht auf die Sage zurück, wonach das Orakel von Delos den Einwohnern von Athen geweißsagt haben soll, dass die wütende Pest dann in den Griff zu bekommen wäre, wenn sie den würfelförmigen Altar des Apoll verdoppeln würden.

Diese Aufgabe wurde so verstanden, dass eine Euklidische Konstruktion (also mit Zirkel und Lineal) gefunden werden sollte, die ausgehend von der Kantenlänge eines gegebenen Würfels die Kantenlänge des Würfels mit doppeltem Volumen ableiten sollte. Wie wir heute wissen, ist eine (exakte) derartige Konstruktion unmöglich, wenngleich es sehr wohl möglich ist, die Aufgabe auf beliebige Genauigkeit mit Euklidischen Mitteln durchzuführen.

Mit den Mitteln des Papierfaltens hätten die Athener allerdings ihre Freude gehabt, da diese Aufgabe mit solchen Mitteln auf verschiedene Arten lösbar ist. Eine davon ist in folgender Figur abgebildet:




Wir sehen links ein quadratisches Stück Papier, das durch waagrechte Faltkanten gedrittelt worden ist. (Dies kann man am einfachsten durch zick-zack Falten erreichen. Allerdings gibt es auch Konstruktionsschritte, die dies gewährleisten.) Die Eckpunkte des Quadrats werden wie abgebildet mit $A$, $B$, $C$ und $D$ beschriftet, und die Endpunkte der parallelen Faltkanten mit $E$ und $F$ bzw. $G$ und $H$. Im mittleren und im rechten Bild sehen wir, dass das Blatt so gefaltet wurde, dass der Punkt $C$ auf den Punkt $\overline{C}$ auf $AB$ zu liegen kommt, und gleichzeitig der Punkt $H$ auf den Punkt $\overline{H}$ auf der Faltkante $EF$. Die Strecken $A\overline{C}$ und $B\overline{C}$ haben nun die Längen $a$ bzw. $b$.

## AUFGABE 5

*Zeige, dass* $a : b = \sqrt[3]{2} : 1$ *gilt.*

Anders gesagt, ist nachzuweisen, dass der Punkt $\overline{C}$ das Delische Problem löst. $a$ ist die Kantenlänge eines Würfels mit dem doppleten Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge $b$.

Robert Geretschläger, 2009

# Papierfalten und Algebra

## Blatt 6 Name:

### Dritte Wurzeln falten

In Aufgabe 4 haben wir erkannt, dass die gemeinsame Tangente der Parabeln mit den Gleichungen $p_1 : y^2 = 2ax$ und $p_2 : x^2 = 2by$ die Steigung $-\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ hat. Nun wissen wir aber auch schon, dass eine gemeinsame Tangente zweier Parabeln sofort erhalten werden kann, wenn die Brennpunkte der beiden Parabeln gleichzeitig auf die jeweils zugehörigen Leitlinien gefaltet werden. Ein derart simultanes Falten von zwei Punkten auf zwei Geraden ist eine elementare Operation der Origamikonstruktionen. Somit ergibt sich eine Alternative zur Lösung des Delischen Problems:

## AUFGABE 6.1

*Gib eine Möglichkeit für Punkte und Geraden an, die so gewählt wurden, dass das gleichzeitige Falten der beiden Punkte auf die jeweils zugehörige Gerade eine Faltkante mit der Steigung* $-\sqrt[3]{2}$ *ergibt.*

Natürlich bietet sich nach der Lösung dieser Aufgabe auch gleich die Lösung der Verallgemeinerung an:

## AUFGABE 6.2

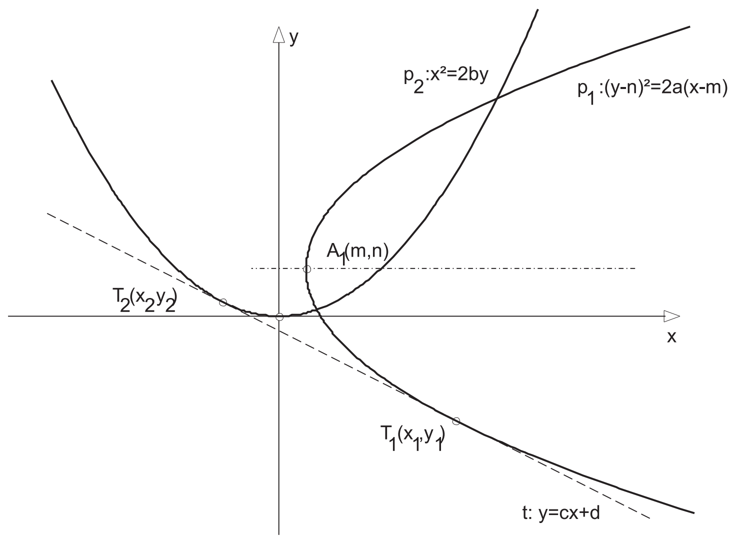
*Gib eine Möglichkeit für Punkte und Geraden an, die bei vorgegebener natürlicher Zahl* $n > 2$ *so gewählt wurden, dass das gleichzeitige Falten der beiden Punkte auf die jeweils zugehörige Gerade eine Faltkante mit der Steigung* $-\sqrt[3]{n}$ *ergibt.*

# Papierfalten und Algebra

## Blatt 7 Name:

### Lösen kubischer Gleichungen durch Falten

In Aufgabe 4 haben wir erkannt, dass die gemeinsame Tangente der Parabeln mit den Gleichungen $p_1 : y^2 = 2ax$ und $p_2 : x^2 = 2by$ die Steigung $-\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ hat. Wir dürfen erwarten, dass die Steigungen gemeinsamer Tangenten von Parabeln, deren relative Lage etwas allgemeinerer Art ist, einen etwas komplexeren Zusammenhang ergeben. Um einen Schritt in dieser Richtung zu machen, betrachten wir folgende Figur:




Die Parabel $p_1$ hat die Gleichung $p_1 :\ (y-n)^2 = 2a(x-m)$. Das bedeutet, dass $a$ der Parameter von $p_1$ ist, und $(m, n)$ die Koordinaten ihres Scheitels sind. Die Parabel $p_2$ hat wie in Aufgabe 4 die Gleichung $p_2 :\ x^2 = 2by$.

## AUFGABE 7.1

*Bestimme eine kubische Gleichung, deren Koeffizienten von den Werten $a$, $b$, $m$ und $n$ abhängen, deren Lösungen die Steigungen der gemeinsamen Tangenten von $p_1$ und $p_2$ sind.*

Um die Lösungen einer kubischen Gleichung mit Papierfaltmethoden bestimmen zu können, kommt es uns also wieder einmal auf die Bestimmung gemeinsamer Tangenten von Parabeln an. Wir wissen schon, dass dies praktisch bedeutet, zwei Punkte (die Brennpunkte der Parabeln) gleichzeitig auf die jeweils zugehörigen Geraden (die Leitlinien der Parabeln) zu falten. Es stellt sich daher folgende Frage:

## AUFGABE 7.2

*Bestimme die Koordinaten von Punkten $P_1$ und $P_2$ und die Gleichungen von Geraden $l_1$ und $l_2$ so, dass die Steigungen der Faltkanten, die sich bei gleichzeitigem Falten von $P_1$ auf $l_1$ und $P_2$ auf $l_2$ ergeben, die Gleichung $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ lösen.*

Robert Geretschläger, 2009

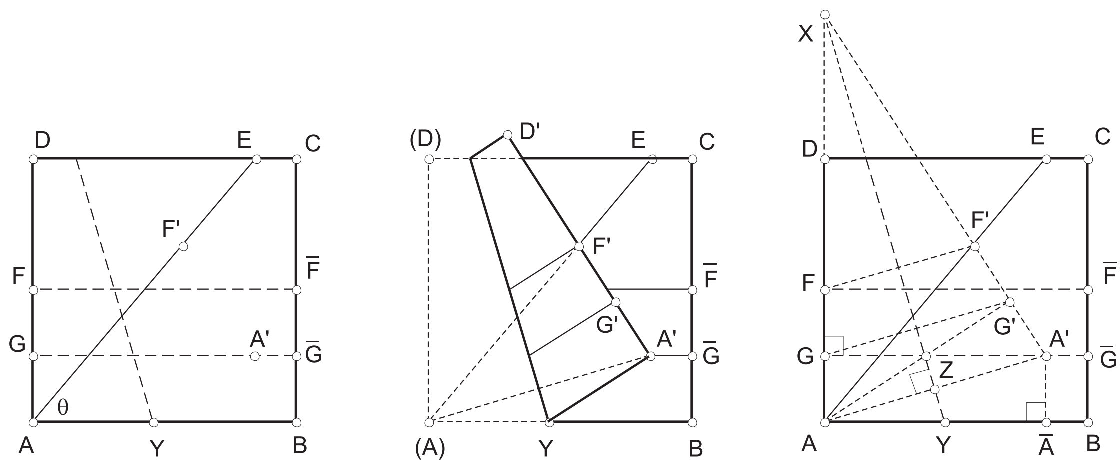
# Papierfalten und Algebra

## Blatt 8 Name:____________________

### Winkeldreiteilung nach Abe

Ebenso wie die Würfelverdoppelung ist die Winkeldreiteilung eine klassische "unlösbare" Aufgabe. Das soll auch in diesem Zusammenhang heißen, dass es keine klassische Euklidische Konstruktionsmethode (also nur mit Zirkel und Lineal) geben kann, die zu jedem Winkel konstruktiv die Winkeldrittelung bestimmen kann. (Wie bei der Würfelverdoppelung gibt es freilich zahlreiche Möglichkeiten, diese Konstruktion auf beliebige Genauigkeit auszuführen.) Mit Papierfaltkonstruktionen ist dies allerdings sehr wohl exakt möglich.

In folgender Figur sehen wir eine solche Konstruktion, nach H. Abe:




In den linken beiden Abbildungen sehen wir ein quadratisches Stück Papier mit den Eckpunkten $A$, $B$, $C$ und $D$. Ein Winkel $\theta$ wird von der Seite $AB$ des Quadrats und der Strecke $AE$ eingeschlossen. Um den Winkel $\frac{\theta}{3}$ zu bestimmen, wird zunächst eine beliebige Strecke zweimal von $AB$ aus parallel zur Seitenkante gefaltet. Dies gibt uns die Faltkanten $F\overline{F}$ und $G\overline{G}$. Anschließend werden gleichzeitig $A$ auf $G\overline{G}$ und $F$ auf $AE$ gefaltet, was die Punkte $A'$ bzw. $F'$ ergibt.

## AUFGABE 8

*Beweise, dass $\angle A'AB = \frac{\theta}{3}$ gilt.*

Um diesen Beweis zu erleichtern ist in der rechten Zeichung einiges ergänzt, das zur Beweisführung von Nutzen sein kann.

Robert Geretschläger, 2009

# Papierfalten und Algebra

## Blatt 9 Name:____________________

### Winkeldreiteilung durch Lösung einer kubischen Cosinusgleichung

Nach der Bearbeitung all dieser Fragen sollte es schon klar sein, dass eine kubische Gleichung hinter der Winkeldrittelung stehen muss. Dies erklärt, warum die Aufgabe mit Euklidische Methoden unlösbar ist, aber mit Origamimethoden sehr wohl gelöst werden kann.

Es muss also möglich sein, eine passende kubische Gleichung in diesem Zusammenhang zu identifizieren. Dies kann z.B. mit Hilfe der Summenformeln der Winkelfunktionen gelingen. Wir erinnern uns daran, dass etwa die Formeln

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \text{und} \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}$$

gelten. Daraus lassen sich auch weitere Formeln, z.B. für $\cos 3x$ ableiten.

## AUFGABE 9

*Bestimme eine Formel für* $\cos 3x$ *und leite daraus eine Methode zum Dritteln eines Winkels mit Papierfaltmethoden ab.*

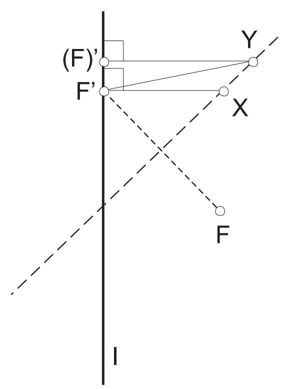
Diese Aufgabe ist bewusst allgemein formliert. Vielleicht findest Du eine interessante, bisher unbekannte Methode diese Aufgabe zu lösen.

# Papierfalten und Algebra

## Tipps zu den Aufgaben

**Tipp zu Aufgabe 1:** Der Mittelpunkt $M$ der Strecke $XU$ ist zugleich Mittelpunkt des Kreises. Bestimme zuerst die Koordinaten von $M$. Dann läßt sich auch der Radius des Kreises leicht bestimmen, z.B. als Abstand von $M$ zu $U$. Dies ist auch der Abstand von $M$ zu $R$ bzw. zu $S$. Alternativ kann man auch sofort die Gleichung des Kreises bestimmen.

**Tipp zu Aufgabe 2:** Um diese Eigenschaft jeder Faltkante nachweisen zu können sind eigentlich zwei Dinge zu zeigen. Zunächst muss man zeigen, dass es einen Punkt $X$ auf der Faltkante mit der definierenden Parabeleigenschaft $XF = Xl$ gibt. Dann ist auch noch zu zeigen, dass es keinen weiteren Punkt $Y \neq X$ auf der Faltkante mit der Eigenschaft $YF = Yl$ gibt. Folgende Figur kann bei der Begründung dieser beiden Tatsachen von Nutzen sein.




**Tipp zu den Aufgaben 3.1 und 3.2:** Eine Gerade mit der Steigung $s$, die durch einen Punkt mit den Koordinaten $(v, w)$ geht, hat die Gleichung $y - w = s(x - v)$. Weiß man, dass eine solche Gerade Tangente einer Parabel sein soll, kann man zunächst die Schnittpunkte der Geraden in allgemeiner Form mit der Parabel berechnen. Da eine Tangente mit der Parabel nur einen Punkt gemeinsam hat, muss die Diskriminante der resultierenden quadratischen Gleichung gleich 0 sein. Dies ergibt eine Bedingung, die man nach einiger algebraischer Umformung ausnutzen kann.

**Tipp zu Aufgabe 4:** Die Tangente einer Parabel, z.B. mit der Gleichung $y^2 = 2px$, die die Parabel in einem bekannten Punkt $(r, s)$ der Parabel berührt, hat die Gleichung $sy = px + pr$. (Spaltform der Tangentengleichung). Verwendet man die abgebildeten Punkte $T_1(x_1, y_1)$ und $T_2(x_2, y_2)$ (mit zunächst unbekannten Koordinaten), so kann man die Aufgabe mit Hilfe gezielter algebraischer Umformung lösen.

**Tipp zu Aufgabe 5:** Zunächst ist es interessant zu beobachten, dass die Dreiecke $\triangle BP\overline{C}$ und $\triangle E\overline{C}H$ ähnlich sind. (Begründung?) Darüber hinaus wissen wir auch einiges über die Seitenlängen des Dreiecks $\triangle BP\overline{C}$. Es gilt wegen der Faltoperation offensichtlich $PC = P\overline{C}$, und somit $BP + B\overline{C} = BP + PC$. Außerdem ist $\triangle BP\overline{C}$ rechtwinkelig, und somit gilt auch hier der Lehrsatz von Pythagoras.

**Tipp zu den Aufgaben 6.1 und 6.2:** Eine Parabel nit der Gleichung $y^2 = 2px$ (also in erster Hauptlage mit dem Parameter $p$) hat als Brennpunkt den Punkt mit den Koordinaten $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ und als Leitlinie die Gerade mit der Gleichung $x = -\frac{p}{2}$. Analoges gilt natürlich für eine Parabel in 2. Hauptlage.

**Tipp zu den Aufgaben 7.1 und 7.2:** Wie in der Lösung zu Aufgabe 4 wird die Spaltform der Tangentengleichung nützlich sein. Darüber hinaus kann man sich überlegen, dass sich $P_1$ und $l_1$ relativ zur Parabel $p_1$ ableiten lassen, wenn man bedenkt, dass diese Parabel aus der ersten Hauptlage entsteht (die ja in der Aufgabe 4 verwendet wurde), indem die gesamte Parabel um den Vektor $(m, n)$ verschoben wird. Dies gilt also auch für Brennpunkt und Leitlinie der Parabel.

**Tipp zu Aufgabe 8:** Es ist hilfreich, ähnliche und kongruente Dreiecke in der rechten Abbildung zu identifizieren. Insbesondere kann man beweisen, dass die Dreiecke $\triangle AA'\overline{A}$, $\triangle AA'G'$ und $\triangle AF'G'$ kongruent sind.

**Tipp zu Aufgabe 9:** Man kann z.B.die Beziehung $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ beweisen. Setzt man $\cos\alpha = x$, so erhält man eine kubische Gleichung, die man bei Vorgabe von $\cos 3\alpha$ lösen kann, um $\cos\alpha$ zu bestimmen. Brennpunkte und Leitlinien der relevanten Parabeln kann man aus dem Ergebnis von Aufgabe 7 ableiten.