Geometrieaufgaben II

1) Im Inneren eines Dreiecks ABC liege ein Punkt P. Es seien X, Y und Z in dieser Reihenfolge die Schnittpunkte von AP mit BC, von BP mit CA und von CP mit AB. Beweise, dass

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$

gilt. (Satz von CEVA)

2) Gegeben sei ein Dreieck ABC mit seinem halben Umfang s. Die Punkte E und F liegen auf der Geraden AB mit $CE = CF = s$. Beweise, dass der Ankreis k_1 des Dreiecks ABC an der Seite AB den Umkreis k des Dreiecks EFC berührt. (Bulgarien 1995)

3) Sei ABC ein Dreieck mit $|AC| = 2|AB|$ und dem Umkreis k. Die Tangenten an den Kreis k in den Punkten A und C schneiden sich im Punkt P. Beweise, dass der Schnittpunkt der Geraden BP mit der Streckensymmetrale der Seite BC auf dem Kreis k liegt. (Mathematisches Duell 2007)

4) Im Dreieck ABC liegen ein Punkt D auf BC und ein Punkt E auf CA, sodass $\angle BAD = 60^o$, $\angle ABE = 50^o$, $\angle CAD = 20^o$ und $\angle CBE = 30^o$ gelten. Bestimme den Winkel $\varphi = \angle BED$. (Folklore)

5) Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit dem Umkreismittelpunkt O. Die Streckensymmetrale von BC (durch den Mittelpunkt E von BC) schneidet die Gerade AB in Z. Der Umkreis von CEZ schneidet AB ein zweites Mal in H und die Gerade CD in einem Punkt $T \neq D$. Die Gerade ET schneidet AD in K und CH in L. Beweise, dass die Punkte A, H, L und K auf einem gemeinsamen Kreis liegen. (Griechenland 2019)

6) Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck und D der zu B bezüglich C symmetrische Punkt. Die Tangenten an den Umkreis von ABC durch D berühren diesen in den Punkten E und H, und die Tangente an den Umkreis in C schneide EH im Punkt F. Beweise, dass das Dreieck FAD gleichseitig ist. (Irland 2019)

7) Es sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck mit Inkreismittelpunkt I. Der Inkreis berühre die Seite BC in E und es bezeichne F den Schnittpunkt der Geraden AI mit der Seite BC. Wir nehmen an, der Umkreis ω von ABC schnede den Umkreis von AEF in einem Punkt $D \neq A$. Beweise $\angle ADI = 90°$. (Mongolei 2019)