

Folgen und Funktionalgleichungen Aufgaben

Robert Geretschläger

1) Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für die Summe

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1}.$$

Leiten Sie von diesem den Wert von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$ ab.

2) Es sei $\langle a, b, c \rangle$ eine arithmetische Folge. Weisen Sie nach, dass

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} \right\rangle$$

ebenfalls eine arithmetische Folge ist.

3) Beweisen Sie

$$\begin{aligned} 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 \pm \dots + (-1)^n (n-1)^2 + (-1)^{n-1} n^2 &= \\ &= (-1)^{n+1} (1 + 2 + \dots + n). \end{aligned}$$

Lösen Sie folgende Funktionalgleichungen.

4)

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = (f(y))^{1/x}$$

5)

$$f(x+y) + f(x-y) = f(x) + 6xy \cdot \sqrt[3]{f(y)} + x^3$$

6)

$$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2$$

7)

$$f(x+y) + f(x-y) - f(x) \cdot (y+2) = y \cdot (2y - x^2)$$