Dörfler, W. (2005): Diagrammatic Thinking: Affordances and Constraints. – In: M. Hoffmann et al. (Hg.) Activity and Sign-Grounding Mathematics Education. – Springer: New York.

Rotman, B. (1993): Ad infinitum. The Ghost in Turing's Machine. Stanford Press.

Peirce, CH.S. (1976): The New Elements of Mathematics (NEM), vol. IV (Hg. C. Eisele), Mouton, Den Haag.

Robert GERETSCHLÄGER, Graz

Das Känguru der Mathematik – Einige Gedanken zum österreichischen Ergebnis 2005

Einige Stichworte zum Känguru der Mathematik

Der internationale Mathematikschülerwettbewerb „Känguru der Mathematik" hat sich in den letzten Jahren ebenso schon als Fixpunkt der österreichischen Schulszene etabliert, wie auch in dutzenden weiteren Ländern. Einige Schlagworte seien aber für jene Leser kurz zusammengefasst, denen der Känguru noch nicht so ein Begriff sein mag:

- Multiple-Choice-Wettbewerb zur Popularisierung der Mathematik auf breiter Basis
- Schwerpunkt der Aufgaben aus dem Bereich Denksport, mathematische Rätsel, logisches Denken
- Ziel ist Teilnahme möglichst vieler Schüler
- Europa: etwa 3,5 Millionen Schülerinnen und Schüler in über 35 Staaten
- Österreich: jährlich über 130 000 Teilnehmer und Teilnehmerinnen
- 5 Alterskategorien; Bewertung nach Jahrgängen getrennt
- jeweils 5 Lösungsvorschläge; eine vorgeschlagene Antwort richtig
- für jede richtige Antwort 3/4/5 Punkte (für falsche Antwort minus ein Viertel dieser Punktezahl); Sockelpunkte um negative Ergebnisse zu vermeiden
- Siegerehrungen in Schule, Ländern, Bund
- Sommercamps, Literatur, Websites: www.kaenguru.at (Österreich) und www.mathkang.org (international)

All jene Leserinnen und Leser, die mehr Information über die Organisation benötigen, sind herzlich eingeladen, die oben genannten Websites zu besuchen.

Statistische Auswertung

Im Jahr 2005 wurde das Auswertungsprogramm für die österreichischen Ergebnisse erstmals mit einem ausführlichen statistischen Teil ausgestattet. Dies ermöglicht, dass nicht nur wie schon bisher die Gesamtpunkteergebnisse der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler nach Jahrgang erfasst werden können, sondern vielmehr auch die Anthäufigkeiten der einzelnen Aufgaben.
Dies schaut folgendermaßen aus. Betrachten wir etwa die Aufgabe 2 aus der Gruppe Benjamin (für 5. und 6. Schulstufe), so lautet diese

2) Anna und Bertha haben zusammen 10 Zuckerln. Bertha hat 2 mehr als Anna. Wie viele hat Bertha?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

Die Auswertung der Ergebnisse für die 2. Klasse (AHS und HS zusammen) sieht folgendermaßen aus:

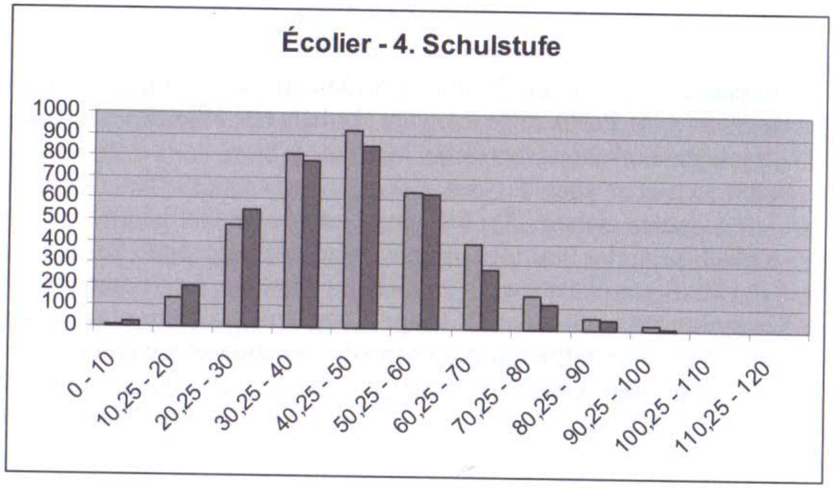
2.	5.01 % (1122)	52.94 % (11866)	33.91 % (7601)	1.32 % (296)	5.63 % (1262)	1.19 % (267)

Dabei sehen wir in der ersten Rubrik die Beispielnummer und in den weiteren Rubriken der Reihe nach den Prozentsatz und die absolute Anzahl derjenigen Teilnehmer und Teilnehmerinnen, die die Antwort A, B, C, D, bzw. E gewählt haben, bzw. in der letzten Rubrik diejenigen, die die Frage unbeantwortet gelassen haben. Die grün (dunkel) unterlegte Rubrik deutet jeweils die richtige Antwort an.
Nun kann man, auch schon bei oberflächlicher Betrachtung, einige Bemerkungen über diese Zahlen anstellen. Etwa ein Drittel der Teilnehmerinnen und Teilnehmer hat richtig erkannt, dass 6 um 2 mehr als 4 ist, während die Summe von 6 und 4 gleich 10 ist. Allerdings hat mehr als die Hälfte die Antwort B, also 7, gewählt. Es lässt sich vermuten, das jene folgenden geistigen Irrweg gegangen sein dürften:

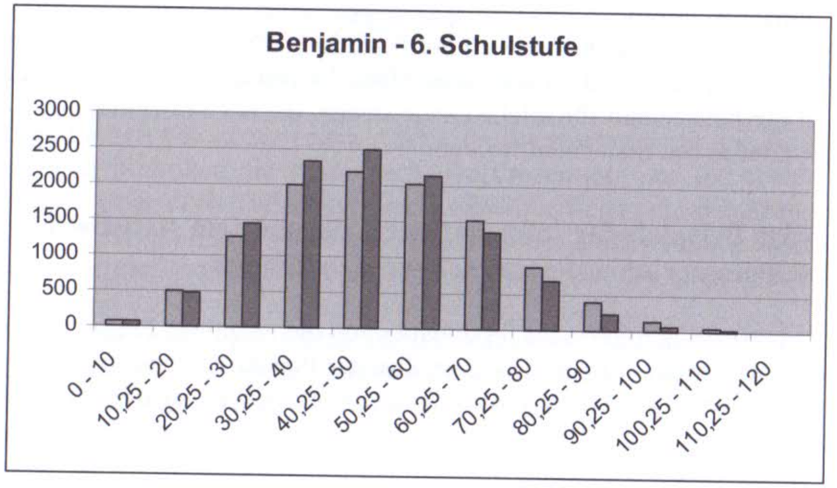
Die Hälfte von 10 ist 5, 2 mehr als 5 ist 7, also hat Bertha 7 Zuckerln.
Ob dies tatsächlich den Hintergrund darstellt, und was dahinter steckt (Textverständnisschwäche, bloße gedankliche Schlampigkeit, mangelnde Übung im Problemlösen) wäre freilich ein offener und potentiell ergiebiger Forschungsbereich.
Es lassen sich aber auch für den Känguruwettbewerb selbst Schlüsse aus diesen Zahlen ziehen. Die Aufgabe 2 soll ja für die Schüler besonders einfach sein; das war hier offensichtlich nicht der Fall. Sollte also für einen künftigen Wettbewerb wieder eine ähnliche Frage ausgewählt werden, sollte sie wohl nicht als Frage 2, sondern vielmehr etwa in der Mitte der Aufgabenstellung (oder knapp davor) angesetzt werden.
Freilich ist mit den jetzigen geringen Mitteln des Kängurus in Österreich die tiefgründige Erforschung derartiger Zusammenhänge nicht möglich.
Interessierte Forschende der Mathematikdidaktik sind herzlich eingeladen, das vorhandene Zahlenmaterial einer ausführlicheren Analyse zu unterziehen. Es wird nur gebeten, jedes Forschungsprojekt in diesem Bereich auch dem Vorstand des Känguruvereins bekannt zu geben, und auch Kopien etwaig resultierender Arbeiten dem Verein zukommen zu lassen.
Im Folgenden werden noch einige bemerkenswerte Details aus dem Zahlenmaterial von 2005 herausgegriffen. Es soll dies allerdings wirklich nur beispielhaft für solche Dinge stehen, die noch reichlich unausgewertet in den Statistiken stecken.

Einige Beispiele für Informationen, die aus dem statistischen Zahlenmaterial herausgelesen werden können

Zunächst ist es interessant festzuhalten, ob die einzelnen Fragestellungen gut gewählt wurden. Um dem Ziel der Popularisierung gerecht zu werden, ist es sicherlich notwendig die Aufgaben so zu wählen, dass eine große Zahl der Teilnehmer und Teilnehmerinnen auch Erfolgserlebnisse aus der Teilnahme am Wettbewerb mitnehmen. Eine Betrachtung der Punktverteilung zeigt, dass dieses Ziel im Jahr 2005 wieder einmal eher nicht in dem Ausmaß erreicht werden konnte wie erwünscht.

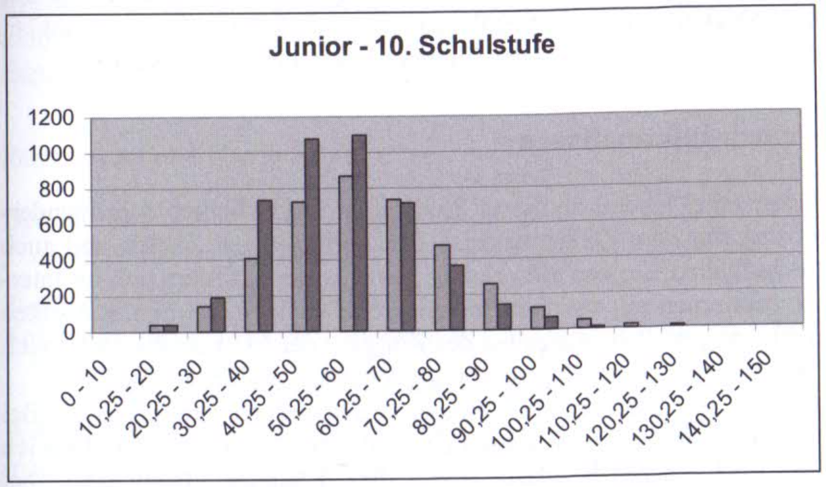


Schon die Verteilung der Punkteergebnisse für die 4. Schulstufe hat zwar die erwartete Form, zeigt aber eine deutliche Verschiebung nach links gegenüber der erwünschten zentrierten Gestalt.



Es werden also im kommenden Jahr noch stärkere Bemühungen als bisher notwendig sein, um den durchschnittlichen Schwierigkeitsgrad

in den erwünschten Bereich zu bringen. Betrachten wir die Ergebnisse der 6. Schulstufe, so hat diese Graphik noch von allen die „zentriertes-te" Gestalt. Hier sind also die Aufgaben, wenn auch im Schnitt doch noch etwas zu schwer, so doch relativ am glücklichsten gewählt. Vergleichen wir diese Graphik etwa mit jener für die Punkteverteilung in der 10. Schulstufe, so erkennen wir unmittelbar, dass diese Aufgaben für die österreichischen Schüler und Schülerinnen im Schnitt deutlich zu schwer waren, und somit dem deklarierten Ziel noch weniger entsprochen haben.



Woran dies nun liegt bedarf einer Interpretation. Genauere Untersuchung der Aufgaben lässt erkennen, dass die Inhalte, auf die man sich beim internationalen Problemseminar geeinigt hat, dem österreichischen Lehrplan nur schlecht entsprechen, und der österreichischen Schulrealität sehr wenig.
Die vollständigen Graphiken können für Interessierte im Internet unter http://geretschlaeger.brgkepler.at/ergebnisgraphiken.pdf heruntergeladen werden.

Die „leichten“ Beispiele – nicht leicht genug!

Betrachtet man, welche Aufgaben von mehr als 80% der Teilnehmerinnen und Teilnehmer richtig gelöst wurden, also die „leichtesten“ Aufgaben, so springen einige Details sofort ins Auge. Etwa die Tatsache, dass es davon nicht viele gibt.
In keinem Jahrgang gab es mehr als zwei Aufgaben, die von 80% richtig gelöst wurden, und in der Gruppe Kadett (für 7. und 8. Schulstufe) gab es gar keine! Ob es daran liegt, dass die Aufgaben absolut gesehen wirklich so schwer waren, oder ob dies irgendwelche Rückschlüsse auf die Fähigkeiten unserer Schülerinnen und Schüler zulässt, ist unklar. Wiederum wäre eine viel detailliertere Untersuchung notwendig.

Weitere Informationen

Platzmangel hindert an dieser Stelle eine ausführlichere Auseinandersetzung mit dem Zahlenmaterial. Die vollständigen Zahlen und auch die Aufgaben, die von 80% richtig gelöst wurden, finden sich im Internet zusammen mit weiteren Informationen, wie auch allen Statistiken und allen gestellten Aufgaben des Känguru der Mathematik Österreich 2005 bei http://geretschlaeger.brgkepler.at/Klagenfurt_05.htm.
Ich lade alle Leser herzlich ein, diese Dokumente durchzulesen. Bei weiterem Interesse am Känguru der Mathematik in Österreich, lade ich Sie auch herzlich dazu ein, die Känguru Homepage bei http://www.kaenguru.at zu besuchen. Für weitere Informationen stehe ich auch jederzeit gerne unter robert.geretschlaeger@brgkepler.at zur Verfügung.

Känguru der Mathematik
Österreich

Markus HOHENWARTER, Salzburg

Dynamische Funktionen mit GeoGebra

GeoGebra ist ein Softwaresystem für den Unterricht, das dynamische Geometrie, Algebra und Analysis verbindet (http://www.geogebra.at). Insbesondere erweitert das Programm die Möglichkeiten der dynamischen Geometrie auf den Bereich der Analysis, weshalb hier auch von *dynamischer Analysis* gesprochen wird. In diesem Beitrag wird speziell auf einige Möglichkeiten der dynamischen Behandlung von Funktionen eingegangen.

Zuordnung und Kovariation

Bei der Betrachtung von Funktionen in einer Variablen der Form $f\colon x \to f(x)$ unterscheidet Malle zwei Aspekte (vgl. Malle 2000b):

Zuordnung: Jedem x wird genau ein $f(x)$ zugeordnet.
Kovariation: Wird x verändert, so ändert sich $f(x)$ in einer bestimmten Weise und umgekehrt.

Während die Funktion beim Zuordnungsaspekt lokal betrachtet wird, macht der Kovariationsaspekt eine globalere Sichtweise der Funktion notwendig. Beide Aspekte sind auch bei unterschiedlichen Darstellungen praktisch immer präsent. Eine Wertetabelle lässt sich zeilenweise (Zuordnungsaspekt) oder spaltenweise (Kovariationsaspekt) lesen. Am Graphen einer Funktion kann ein bestimmter Funktionswert abgelesen werden (Zuordnungsaspekt), andererseits ist auch erkennbar, wie sich der Funktionswert verändert, wenn sich das Argument verändert (Kovariationsaspekt).

GeoGebra bietet mehrere Möglichkeiten, um beiden Aspekten gerecht zu werden. Funktionsplotter und Computeralgebra Systeme haben den didaktischen Nachteil, dass der Prozess der Entstehung eines Funktionsgraphen beim Darstellen des Funktionsterms nicht ersichtlich wird.