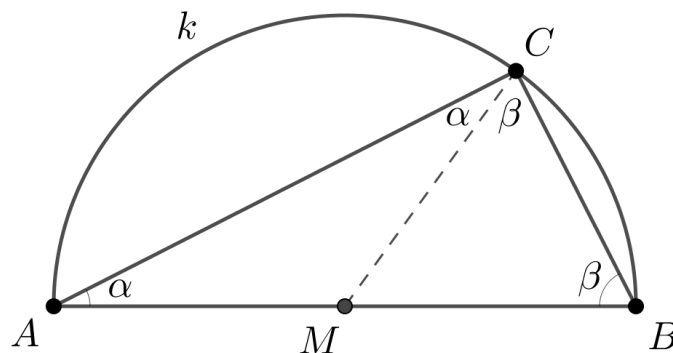


Ebene Euklidische Geometrie – Teil II

Grundlagen

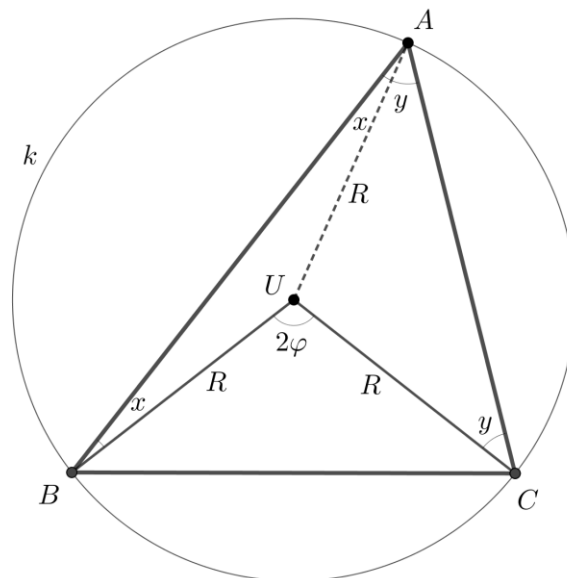
- Peripheriewinkelsatz

Satz von Thales

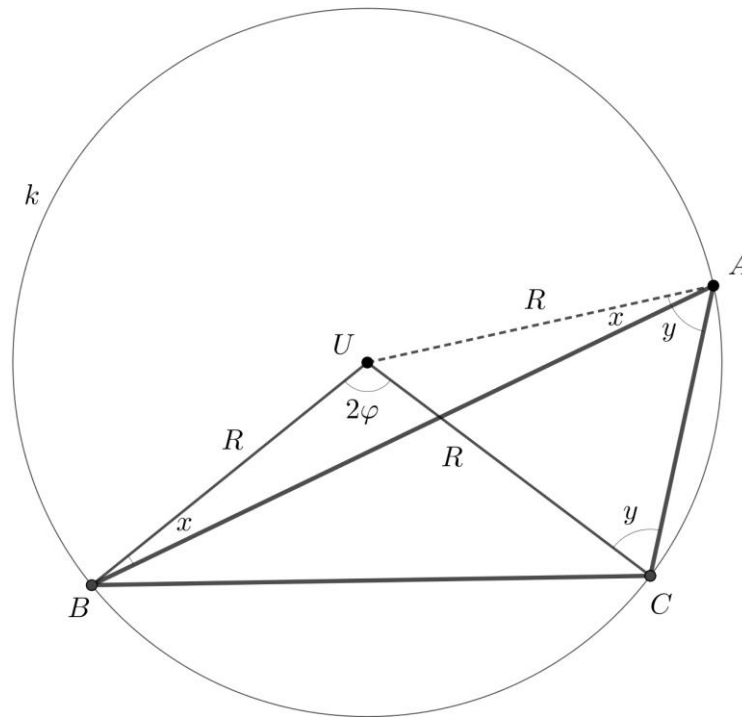


Da die Strecken MA, MB und MC alle Radien im Kreis sind, sind alle gleich lang. Daher sind die Dreiecke MAC und MBC gleichschenkelig, und die gekennzeichneten Winkel α bzw. β jeweils gleich groß. Da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, gilt somit $\alpha + \beta = 90^\circ$.

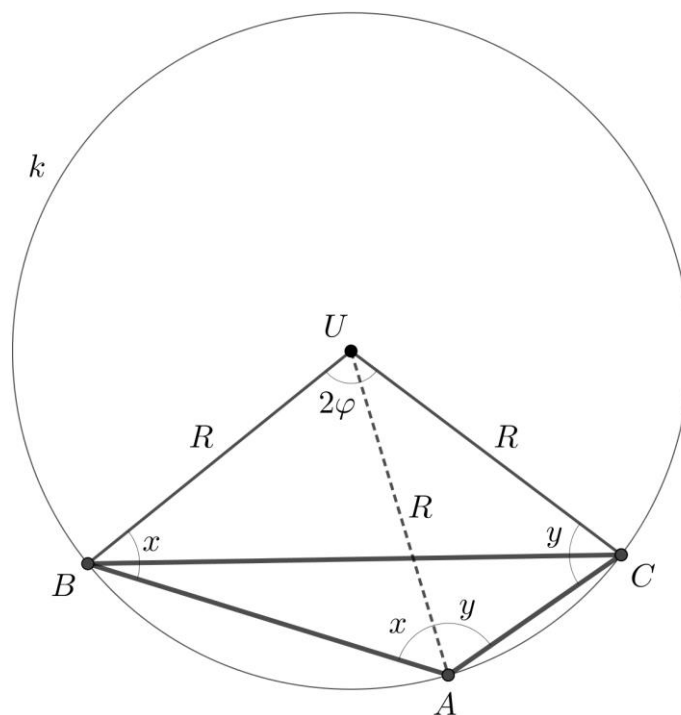
Peripheriewinkelsatz (Randwinkelsatz)



Auch in diesem allgemeineren Fall erhalten wir aufgrund der gleich langen Umkreisradien gleiche Winkel x bzw. y . Einfache Rechnung ergibt $x + y = \phi$.

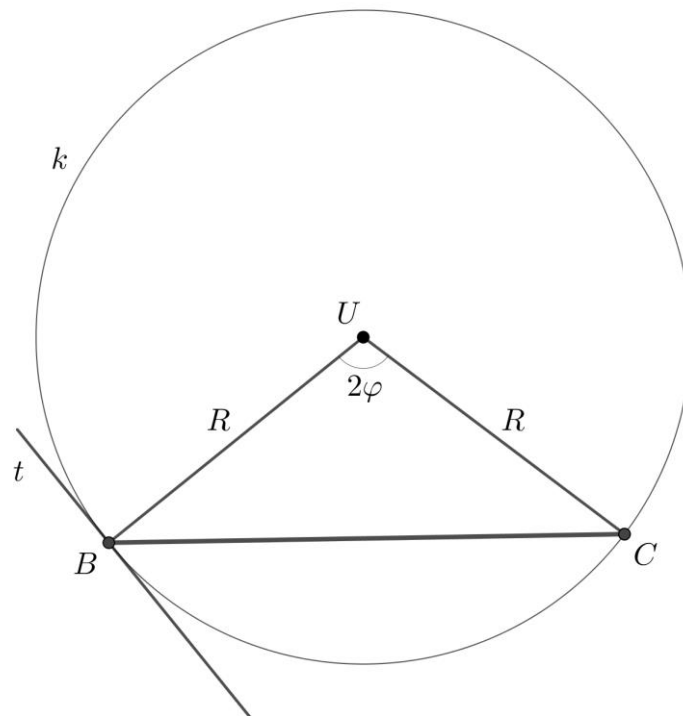


In dieser Situation ist die Rechnung analog; eines der gleichschenkeligen Dreiecke befindet sich aber außerhalb von ABC , und die Berechnung verwendet daher einmal eine Subtraktion anstatt der Addition.



Liegt der Punkt A auf dem kleineren Bogen BC , ergibt die analoge Rechnung $x + y = 180^\circ - \phi$.

Sehnen-Tangentenwinkel



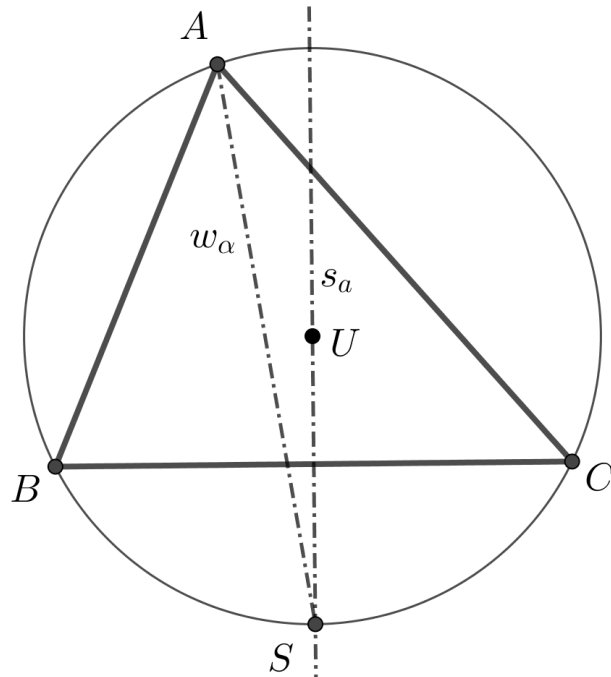
Da der Radius des Kreises in B normal zur Tangente steht, ergibt sich, dass der Winkel, der von der Tangente in B mit der Sehne BC eingeschlossen ist ebenfalls gleich ϕ ist.

Sehnenvierecke

Besitzt ein Viereck ABCD einen Umkreis, so ist die Summe der gegenüberliegenden Winkel im Viereck aufgrund des Peripheriewinkelsatzes sicher gleich 180° .

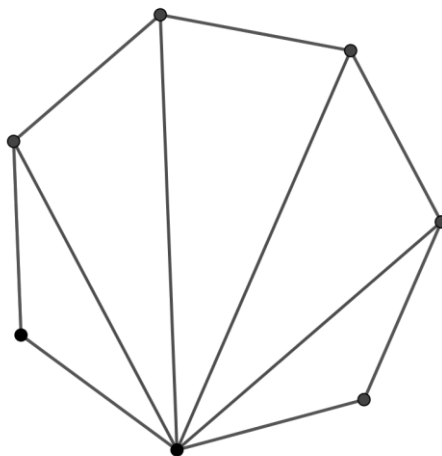
Südpolsatz

Die Streckensymmetrale von BC schneidet den Umkreisbogen im Punkt S, der den Bogen BC halbiert. Die Sehnen BS und CS sind daher gleich lang, und nach dem Peripheriewinkelsatz sind die Winkel $\angle BAS$ und $\angle SAC$ daher gleich groß. S liegt also auf der Winkelsymmetrale in A. Die Winkelsymmetrale in A schneidet also die Seitensymmetrale von a in einem Punkt S (dem „Südpol“) des Umkreises.



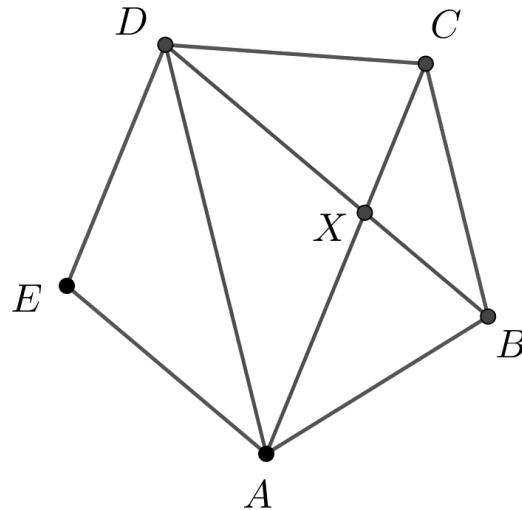
- regelmäßige Vielecke

Winkel im regelmäßigen Vieleck



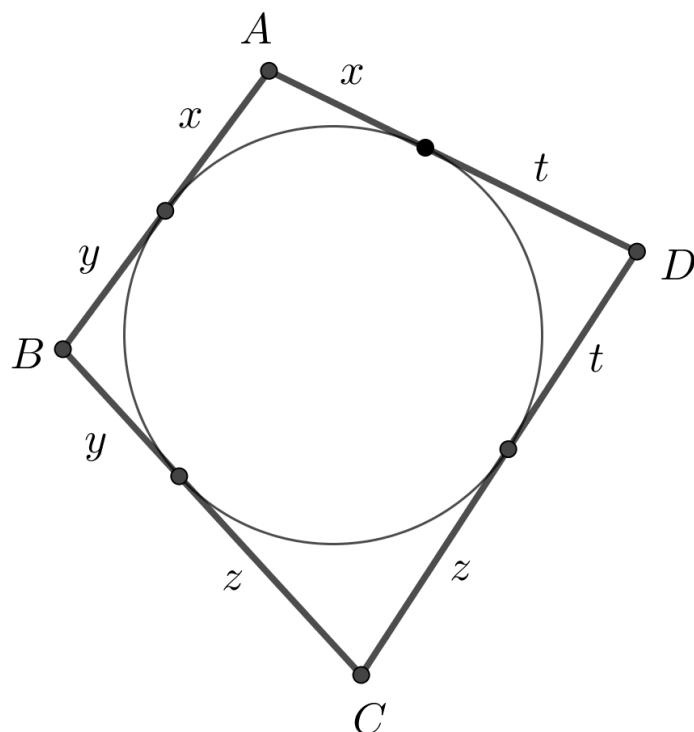
Verbindet man einen Eckpunkt eines regelmäßigen n -ecks mit allen anderen Eckpunkten, wird das n -eck in $(n-2)$ Dreiecke zerteilt. Dies haben jeweils die Winkelsumme 180° , also ist die Summe der Innenwinkel im n -eck gleich $(n-2)180^\circ$. Da alle n Winkel gleich groß sind, hat jeder das Maß $((n-2)180^\circ)/n$.

regelmäßiges Fünfeck und goldener Schnitt



Man kann in dieser Zeichnung alle auftretenden Winkel berechnen, da es ergibt sich somit, dass die Dreiecke ABX, XAD und ABD alle gleichschenkelig sind. Somit ist ABX ähnlich zu DAB (warum?), und man kann das Verhältnis von AD:AB berechnen. Dies ist ϕ , der *goldene Schnitt*, also $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (warum?)

- Tangentenvierecke



Besitzt ein Viereck einen Inkreis, so ist die Summe der Längen gegenüberliegender Seiten jeweils gleich. Dies folgt unmittelbar aus der

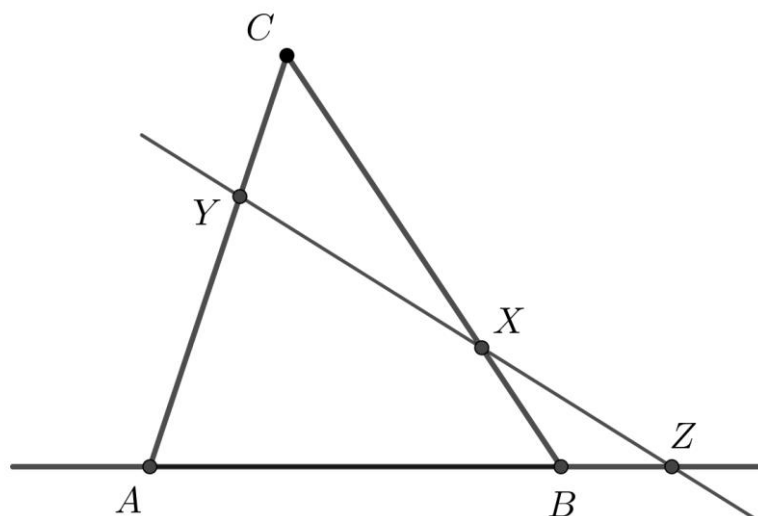
Tatsache, dass die Tangentenstrecken an einen Kreis aus einem Punkt aufgrund der Symmetrie gleich lang sind.

Die folgenden abschließenden Sätze werden an dieser Stelle ohne Beweis vorgestellt. Alle können mit elementaren Mitteln bewiesen werden (Beweise findet man leicht online, z.B. in Wikipedia oder auf Websites wie <https://www.math.uni-bielefeld.de/fast/ba/ceva.pdf>)

Die Beherrschung dieser Sätze ist für Mathematiklehrende sehr hilfreich, aber im Schulalltag nicht unbedingt notwendig. Für Schüler*innen, die sich für höhere Mathematikwettbewerb vorbereiten sind sie von zentraler Wichtigkeit.

Es gibt über diese Sätze hinaus noch unzählige weitere; dies stellt nur eine Auswahl der Bekannteren und Wichtigeren dar.

Satz von Menelaos

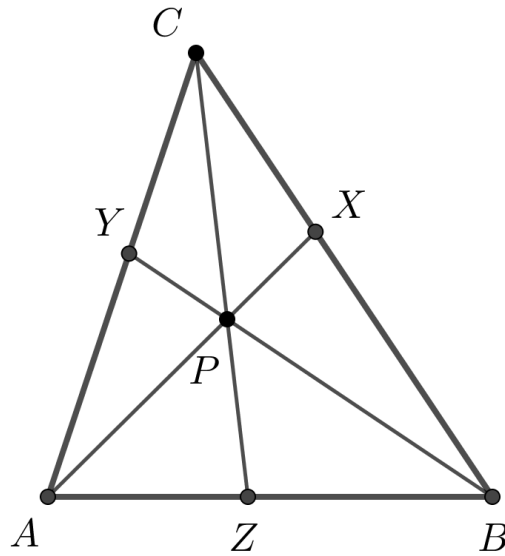


Eine Gerade schneidet die Seiten eines Dreiecks ABC in X, Y und Z. Es gilt:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = -1$$

wobei orientierte Streckenlängen verwendet werden.

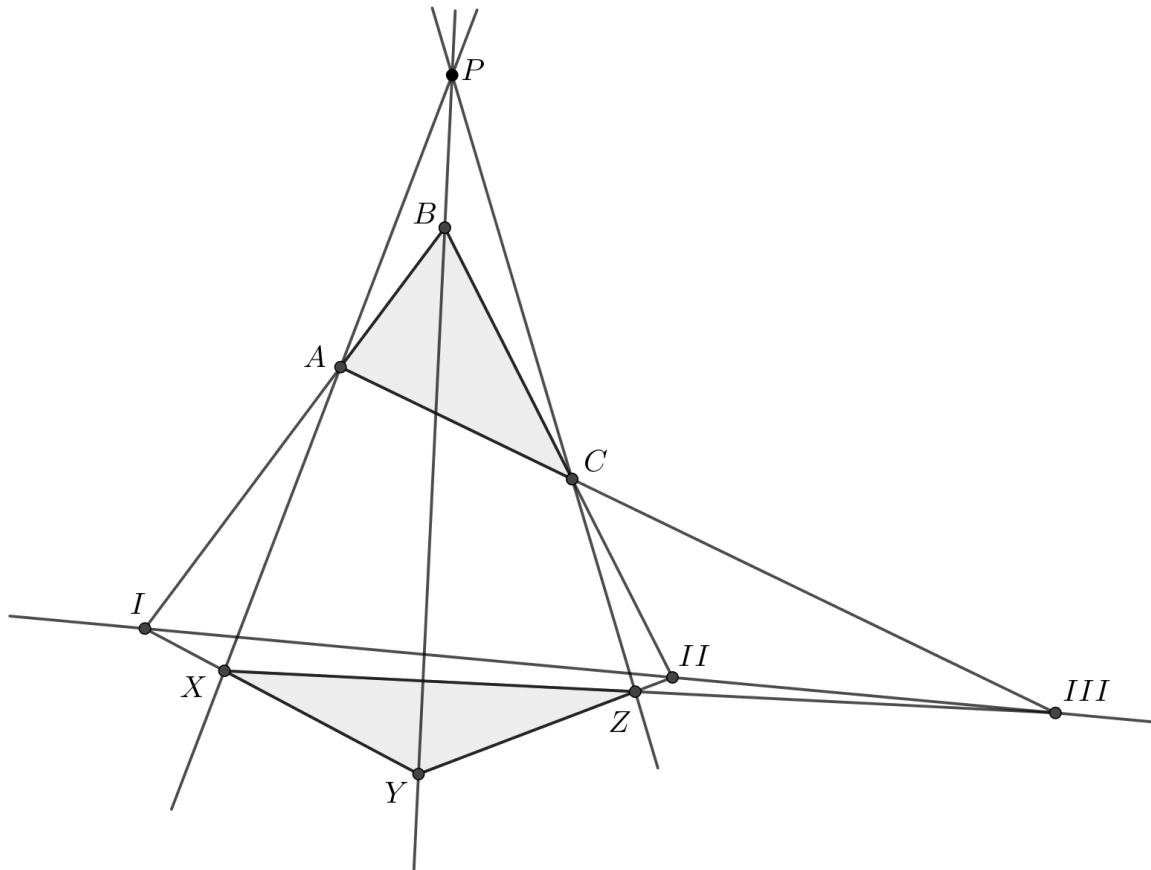
Satz von Ceva



Ein Punkt P wird mit den Eckpunkten eines Dreiecks ABC verbunden, und diese Verbindungen werden jeweils mit den gegenüberliegenden Dreiecksseiten geschnitten. Es gilt

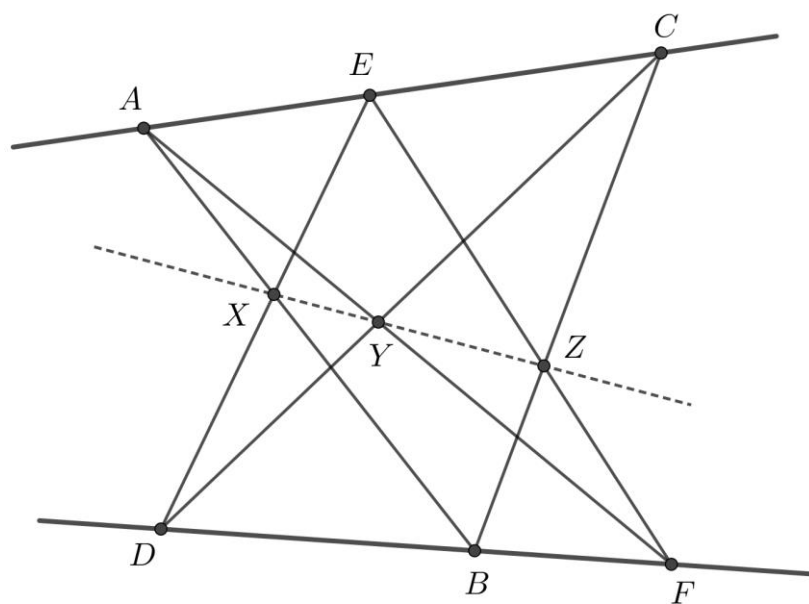
$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

Satz von Desargues



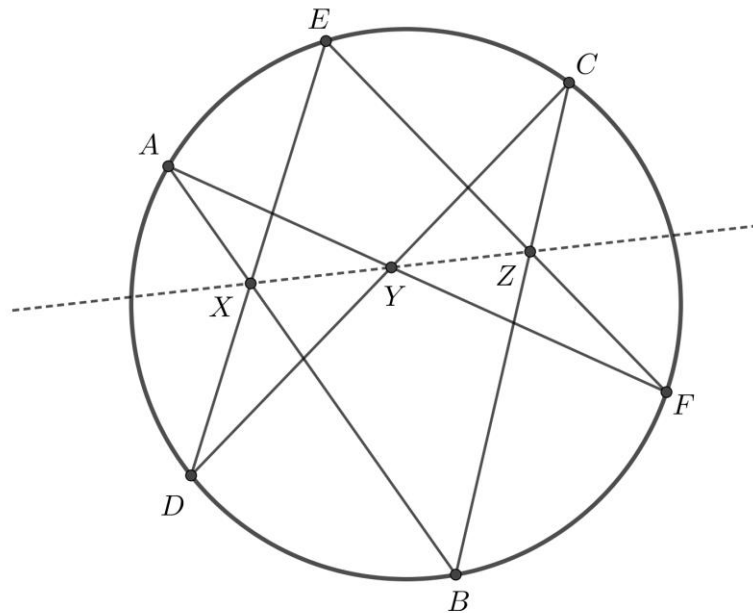
Liegen zwei Dreiecke ABC und XYZ so, dass die geraden AX , BY und CZ durch einen gemeinsamen Punkt gehen, sind die Punkte I , II und III (wie abgebildet, Schnittpunkte der jeweils entsprechenden Dreiecksseiten) kollinear-

Satz von Pappos



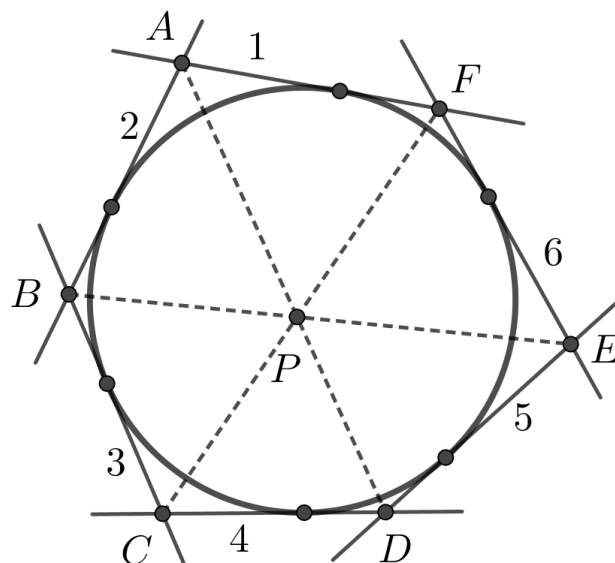
Liegen Punkte A, B, C, D, E, F abwechselnd wie abgebildet auf zwei Geraden, so sind die Punkte $X = AB \cap DE$, $Y = AF \cap CD$, $Z = EF \cap BC$ kollinear.

Satz von Pascal



Liegen Punkte A, B, C, D, E, F wie abgebildet auf einem gemeinsamen Kreis (oder einem beliebigen gemeinsamen Kegelschnitt), so sind die Punkte $X = AB \cap DE$, $Y = AF \cap CD$, $Z = EF \cap BC$ kollinear.

Satz von Brianchon



Sind die Geraden 1, 2, 3, 4, 5, 6 Tangenten eines gemeinsamen Kreises (oder eines beliebigen gemeinsamen Kegelschnitts), und sind die Schnittpunkte dieser Geraden der Reihe nach $A = 1 \cap 2$, $B = 2 \cap 3$, $C = 3 \cap 4$, $D = 4 \cap 5$, $E = 5 \cap 6$, $F = 6 \cap 1$, so gehen die Geraden AD, BE und CF durch einen gemeinsamen Punkt P.