Ebene Euklidische Geometrie – Teil I

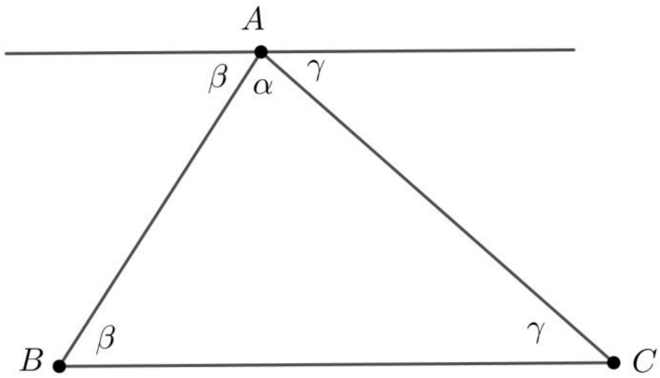
Grundlagen

- Kongruenz

Kongruenzsätze: SSS, SWS, WSW, SSW

- Winkel

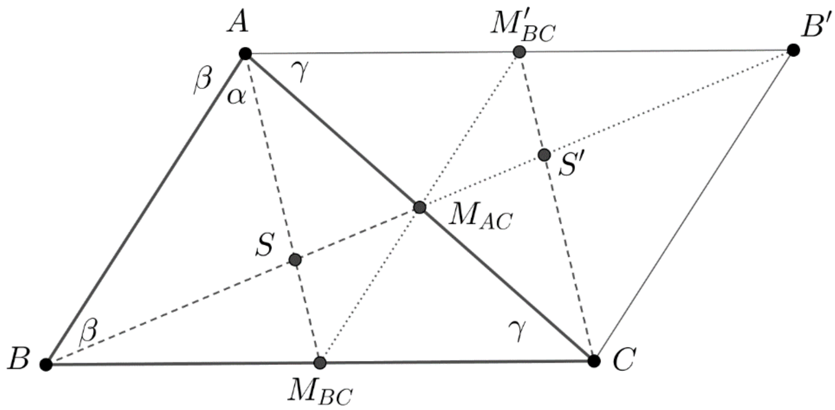
Parallelwinkel, Normalwinkel
Winkelsumme im Dreieck



Zeichnet man eine Parallele durch einen Eckpunkt des Dreiecks, folgt unmittelbar aus der Gleichheit der Parallelwinkel, dass die Summe der Innenwinkel im Dreieck gleich dem gestreckten Winkel ist.

- merkwürdige Punkte im Dreieck

Schwerpunkt



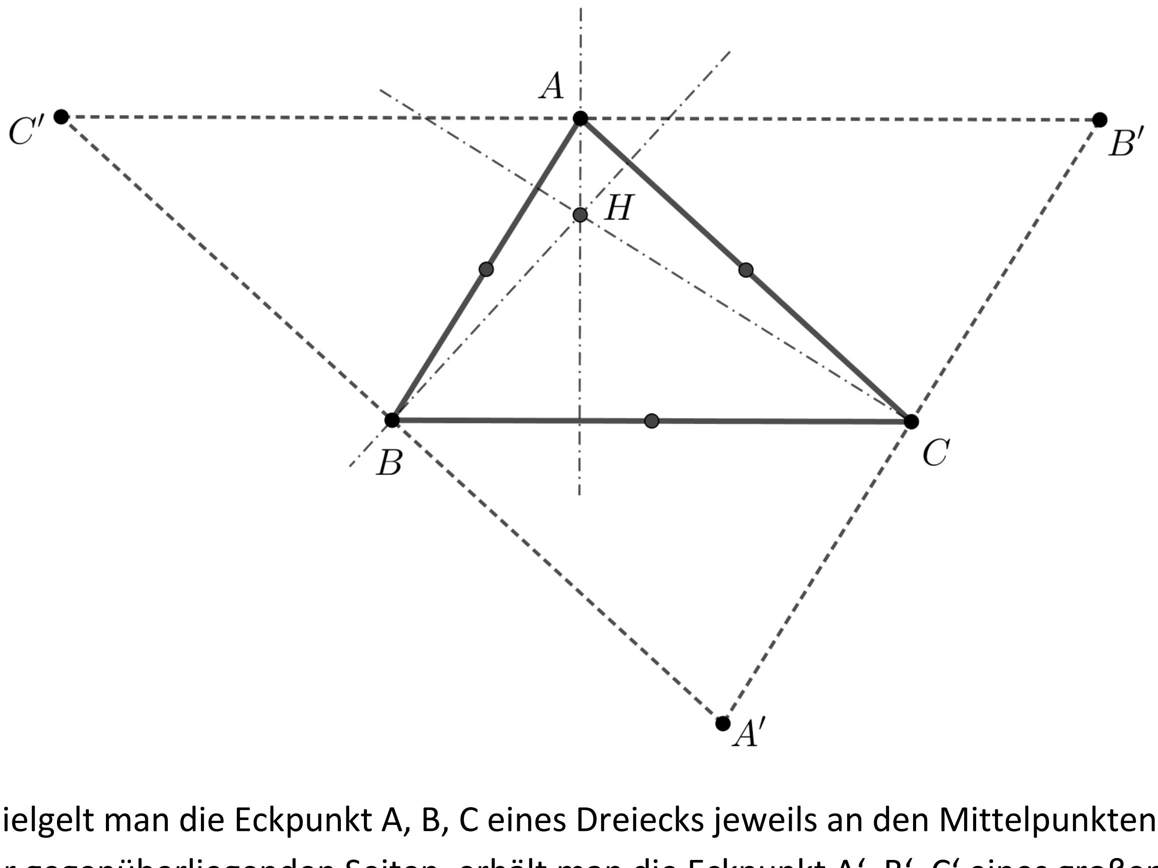
Die Existenz des Schwerpunkts als Schnittpunkt aller drei Schwerlinien folgt unmittelbar aus dem Strahlensatz. Spiegelt man das Dreieck ABC am Mittelpunkt M_{AC} der Seite AC, gilt $AM_{BC} \parallel CM_{BC}'$, und somit BS = SS‘ = S’B‘ aus dem Strahlensatz.

Inkreis, Umkreis

Schneidet man zwei Innenwinkelsymmetralen, ergibt sich ein Punkt, der von allen drei Seiten denselben Normalabstand hat. Dieser liegt somit auf der dritten Winkelsymmetralen. (Existenz von I) und ist Mittepunkt eines Kreises, der alle drei Seiten von innen berührt.

Analog Umkreismittelpunkt als Schnittpunkt von zwei Seitensymmetralen; liegt daher auf der dritten Seitensymmetrale

Höhenschnittpunkt



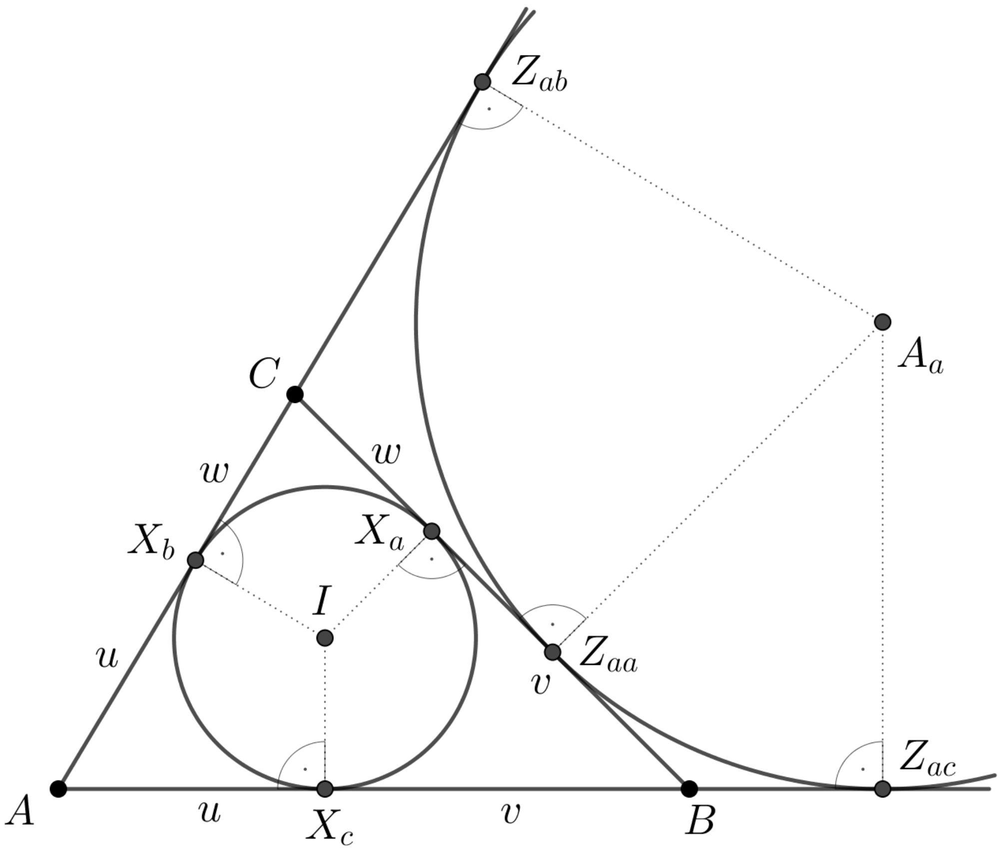
Spielgelt man die Eckpunkt A, B, C eines Dreiecks jeweils an den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten, erhält man die Eckpunkt A‘, B‘, C‘ eines großen Dreiecks. Alle Dreiecke ABC, A’BC, AB’C, ABC‘ sind kongruent. Die Höhen in ABC sind daher die Seitensymmetralen in A’B’C‘, und schneiden sich im Umkreismittelpunkt von A’B’C‘. Die Höhen in ABC schneiden sich daher in einem gemeinsamen Punkt, dem Höhenschnittpunkt H von ABC.

Euler‘sche Gerade

U, H, S liegen auf einer gemeinsamen Geraden mit SH = 2 · SU. (Beweis gelingt ebenfalls mit ähnlichen Dreiecken)

Ankreise

Definition analog zum Inkreis mit einer Innenwinkelsymmetrale und zwei Außenwinkelsymmetralen des Dreiecks.



Da die Tangentenstrecken von einem Punkt an einen Kreis immer beide gleich lang sind, ist es nicht schwer nachzuweisen, dass $CX_a = BZ_{aa}$ gilt. (Folgt unmittelbar aus $AZ_{ac} = AZ_{ab} = s = u/2$, wobei u der Dreiecksumfang ist.)

- Ähnlichkeit

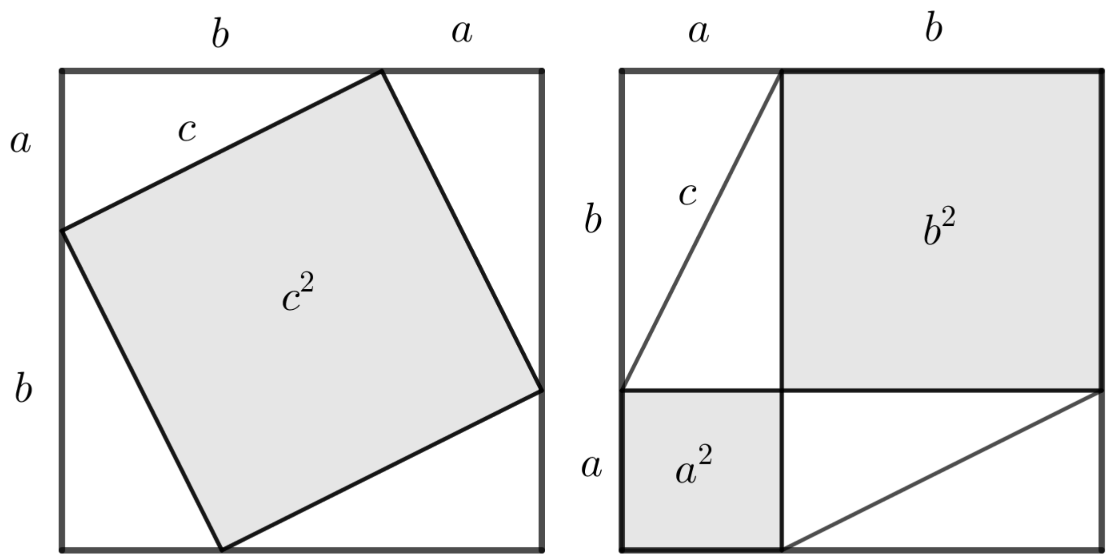
Strahlensatz
Winkel und Streckenverhältnisse und Flächenverhältnisse in ähnlichen Figuren

- Fläche

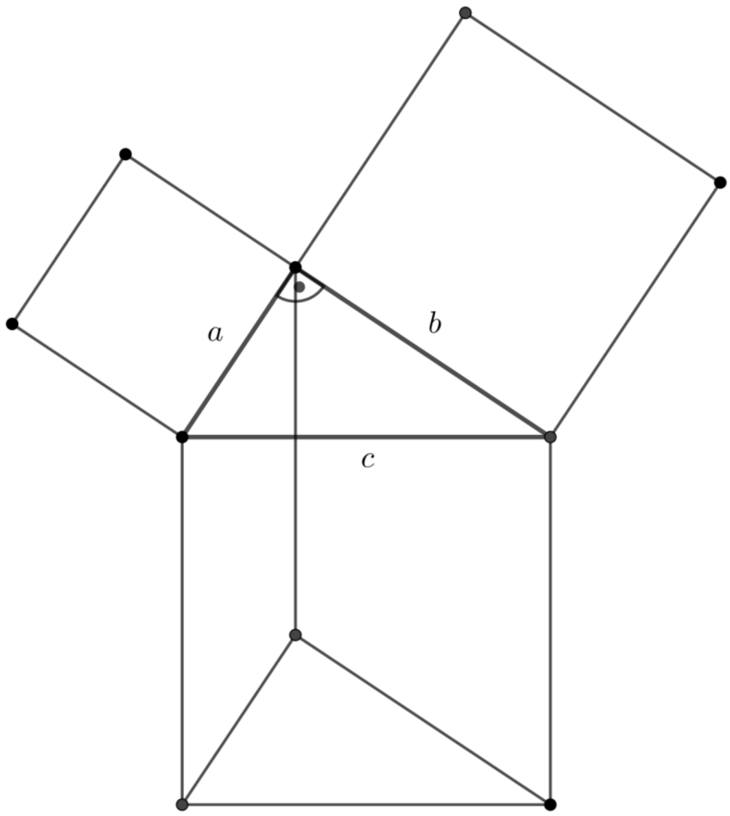
Dreiecksfläche, Vierecksfläche
Flächengleiche Figuren

- Pythagoras

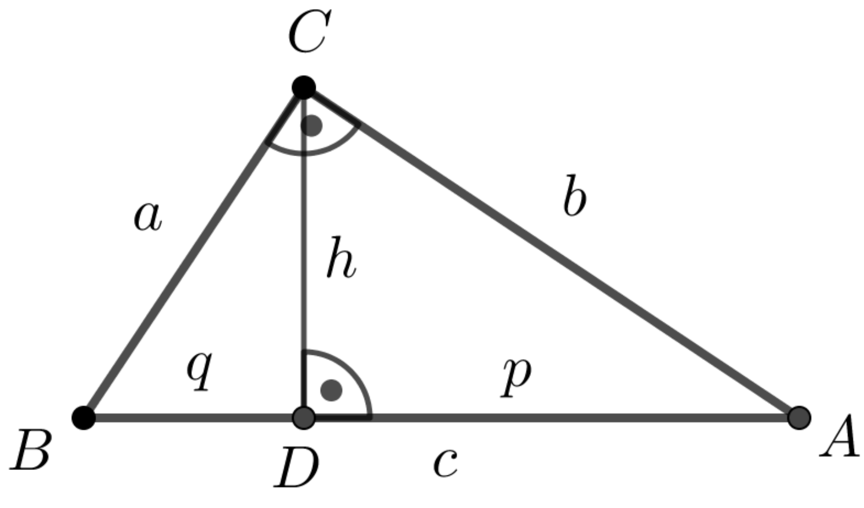
pythagoreischer Lehrsatz



Erster Beweis: 2 Quadrate mit Seitenlänge a + b, gleiche Fläche; in beiden je 4 identische rechtwinkelige Dreiecke mit den Seitenlängen a, b, c.
Daher $a^2 + b^2 = c^2$.



Zweiter Beweis: Flächen der kleinen Quadrate sind gleich den Flächen der Parallelogramme (warum?)
Daher $a^2 + b^2 = c^2$.
Höhensatz, Kathetensatz



Dreiecke ACD und BCD sind ähnlich, daher $h^2 = pq$.

Dreiecke ACD und ABC sind ähnlich, daher $b^2 = pc$.

Aus $b^2 = pc$ und $a^2 = qc$ folgt auch $a^2 + b^2 = (p + q)c = c^2$.