# Algebra I
# Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssysteme

Robert Geretschläger

Aufgaben aus diesem Bereich haben eine starke Nähe zum Schulstoff und stellen daher einen guten Ausgangspunkt für freiwillige vertiefende Beschäftigung der Schülerinnen und Schüler mit mathematischen Inhalten dar. Der Großteil der Standardaufgaben in diesem Bereich verlangt entweder das „Lösen“ von Aussageformen (also die Bestimmung einer Lösungsmenge, der Menge aller Zahlen oder $n$-tupel, die beim Einsetzen in der Struktur eine wahre Aussage ergeben) oder das „Beweisen“ einer Aussageform (also den Nachweis der Tatsache, dass sich eine wahre Aussage beim Einsetzen aller Elemente einer gegebenen Grundmenge ergibt). Es gibt aber eine Vielzahl an Variantionsmöglichkeiten zu diesen Aufgabentypen, die sich z.B. durch Einbeziehung von Parametern, Variation der Grundmengen, oder anderen interessanten ideen ergeben.

Besonders bei Populärwettbewerben sind viele Aufgaben aus diesem Bereich in Texten verpackt („Textgleichungen“), aber wir beschränken uns im Moment auf Aufgabentypen, bei denen es in erster Linie um einen besonderen Kniff im Umgang mit der algebraischen Struktur geht.

Im Folgenden werden einige Aufgaben mit passenden Lösungsideen vorgestellt. Die Lösungsideen können den Lernenden als „Tricks“ verkauft werden, da sie oft zu verblüffend einfacher und tiefer Einsicht führen, irgendwie maßgeschneidert für die zur Diskussion stehende Aufgabe.

## Gleichungen

1) (Känguru, Student 2019 Nr. 22): Wie lautet die Menge aller Parameter $a$, für welche die Gleichung $2 - |x| = ax$ genau zwei Lösungen besitzt?

Idee: Grafische Lösung. Linke und rechte Seite der Gleichung jeweils als Funktion in $x$ interpretieren. Unter welchen Umständen haben die beiden Funktionsgraphen genau zwei Schnittpunkte?

2) (Känguru, Student 2018 Nr. 22): Die quadratische Gleichung $x^2 - x - 2018 = 0$ hat zwei verschiedene Lösungen $x_1$ und $x_2$. Welchen Wert hat $x_1^2 + x_2$?

Idee: Diese Aufgabe ist wegen der scheinbaren Asymmetrie (oder des scheinbaren Tippfehlers?) sehr ungewöhnlich. Der Satz von Vieta ist sehr hilfreich.

3) Lösen Sie die Gleichung in reellen Zahlen in Abhängigkeit vom reellen Parameter $a$:

$$\frac{2ax}{x+a} + \frac{2ax}{x-a} - \frac{a}{x^2-a^2} = 2.$$

Idee: Hier ist zu unterscheiden, ob $a$ positiv, negativ oder gleich 0 ist.

**Ungleichungen**

1) Lösen Sie die Ungleichung in reellen Zahlen:

$$|x^2 + 3x| \geq 2 - x^2.$$

Idee: Hoer sind wieder Fälle zu unterscheiden. Wann gilt $x^2+3x \geq 0$, und welche Konsequenzen hat es, wenn dies der Fall ist? Was ist der andere Fall, und wie unterscheiden sich die beiden Fälle?

2) Beweisen Sie für alle reellen Werte von $a, b, x, y$:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}.$$

Idee: Man kann durch geeignete Äquivalenzumformungen nachweisen, dass diese Ungleichung gleichwertig ist mit einem Ausdruck der Form $(.....)^2 \geq 0$. Diese Behauptung ist für reellwertige Klammerausdrücke sicherlich wahr.

Um Ungleichungen zu beweisen, kann es auch sehr hilfreich sein, Standardungleichungen anzuwenden. Zu diesem Zweck sehr hilfreich sind z.B.

Arithmetisch-geometrische Mittelungleichung:

Für nicht-negative Zahlen gilt:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

mit Gleichheit genau für $x = y$.

Es gilt auch

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

mit Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Hauptsatz:

Gilt $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ und $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$, und ist $(c_1, \ldots, c_n)$ eine Permutation von $(b_1, \ldots, b_n)$, so gilt

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \geq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_n c_n \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1.$$

Wenn etwas für positive ganze Zahlen zu beweisen ist, ist ein Beweis mittels vollständiger Induktion oft ein sinnvolles Werkzeug.

**Gleichungssysteme**

Folgende Gleichungssysteme sind vollständig in reellen Zahlen (wenn nicht anders angegeben) zu lösen.

1)

$$\begin{aligned} xy &= 6 \\ yz &= 5 \\ zx &= 120 \end{aligned}$$

Idee: Das Produkt aller drei Gleichungen gibt Information über mögliche werte von $xyz$.

2)

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4xy + 3y^2 &= 36 \\ 3x^2 - 4xy + 2y^2 &= 36 \end{aligned}$$

Idee: Aus der ähnlichen Struktur der beiden Gleichung kann man auf die Idee kommen, die Differenz der beiden Gleichungen zu bilden. Daraus ergibt sich Information, die sich für eine Fallunterscheidung ausnutzen lässt.

3)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 19^2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 0 \\ x - y + z &= 11 \end{aligned}$$

Idee: Diese Aufgabe ist schon etwas anspruchsvoller. Nach einigen Umformungen kann man etwas über $(x + y + z)^2$ aussagen. Das führt wiederum zu einer Fallunterscheidung für die möglichen werte von $x + y + z$.