Algebra II
Folgen und Reihen, Funktionalgleichungen

Robert Geretschläger

Aufgaben aus diesem Bereich entfernen sich vom Schulstoff, stellen aber Standardinhalte mathematischer Schülerwettbewerbe fortgeschrittener Art dar.

Im Folgenden werden wieder einige Aufgaben mit passenden Lösungsideen vorgestellt. Diese Lösungsideen bewegen sich Schritt für Schritt von der Schulmathematik hin zu den abstrakteren Beweismethoden der Höheren „reinen“ Mathematik.

Folgen und Reihen

Dieser Bereich beginnt mit Themen, die sich noch im Schulstoff finden, wie arithmetische und geometrische Folgen und deren Summenfolgen oder einfach Rekursionen. In höheren Wettbewerben wird schon Kenntnis von allgemeinen linearen Rekursionen und besonders der Fibonacci Folge vorausgesetzt. Ein beliebtes Thema in diesem Zusammenhang ist auch die „Teleskopreihe“.

1) Es sei $a_1 = 1$, $a_2 = 2 + 3$, $a_3 = 4 + 5 + 6$, usw. Berechne den Wert von $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$.

Idee: Wenn man die arithmetische Folge identifiziert hat ist die Berechnung schon fast erledigt.

2) Man beweise

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Idee: Man kann dies mittels vollständiger Induktion beweisen. Es ist aber einfacher, wenn man den Ausdruck $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ berechnet.

3) Folgenaufgabe Griechenland 2019 (in eigenem File)

Diese Aufgabe wurde bei der Griechischen Mathematikolympiade im Vorjahr gestellt. Die Art von Aufgabe (auch in diesem Schwierigkeitsgrad) ist sehr typisch für nationale und internationale Olympiaden. Ich bitte, die Lösung dieser Aufgabe etwas genauer zu studieren; die eingesetzten Methoden sind sehr typisch für derartige Aufgaben.

Funktionalgleichungen

Bei einer typischen Funktionalgleichung geht es, ebenso wie bei den Gleichungsaufgaben, um das „Lösen“ einer algebraischen Aussageform, also um die Auffindung aller Möglichkeiten, etwas einzusetzen, wodurch eine wahre Aussage etntsteht. In diesem Zusammenhang bedeutet dies aber, die Bestimmung aller reellen Funktionen mit der Eigenschaft, dass sie für alle reellen Werte der Variablen gelten. So wäre etwa $f(x) = 3x + 2$ eine „Lösung“ der Funktionalgleichung $f(2x) = 2f(x) - 2$. Eine Funktionalgleichung ist so etwas wie eine Differentialgleichung ohne Ableitung.

1) $f(x + y) - 2f(xy) - 3f(x) + (2x^2 - 1) \cdot f(y) = 2x(xy - 1) - 5$

Idee: Setzt man $x = y = 0$ erhält man sofort eine Gleichung, aus der man den Wert von $f(0)$ ableiten kann. Setzt man nur $y = 0$ und läßt x variabel, erhält man eine Gleichung, die man mit Hilfe des eben bestimmten Werts von $f(0)$ zu $f(x) = x^2 + x + 1$ vereinfachen kann. Wenn es also eine Lösung der Funktionalgleichung gibt, kann es nur diese Funktion sein. Durch Einsetzen dieser Funktion bestätigt man dann, dass es sich tatsächlich um eine Lösung handelt.

2) Funktionalgleichung Estland 2019 (in eigenem File)

Diese Aufgabe wurde bei der Estnischen Mathematikolympiade im Vorjahr gestellt. Die Art von Aufgabe (auch in diesem Schwierigkeitsgrad) ist sehr typisch für nationale und internationale Olympiaden. Ich bitte, die Lösung dieser Aufgabe etwas genauer zu studieren; die eingesetzten Methoden sind sehr typisch für derartige Aufgaben.